

ÓPTICA

◊ INTRODUCCIÓN

● MÉTODO

1. En general:
 - a) Se calculan las incógnitas usando las ecuaciones adecuadas.
 - b) Se dibuja un esquema con los rayos luminosos.
 - c) Se compara el resultado del cálculo con el esquema.
2. En los problemas de espejos esféricos:
 - a) Se calcula la distancia focal, que es la mitad del radio del espejo. Se usa la ecuación de los espejos que relaciona las distancias del objeto y de la imagen al espejo con la distancia focal:

$$\frac{1}{s'} + \frac{1}{s} = \frac{1}{f}$$

- b) Se usa la ecuación del aumento lateral en los espejos.

$$A_L = \frac{y'}{y} = \frac{-s'}{s}$$

- c) Se dibuja un esquema que contiene un eje óptico horizontal, el espejo y una flecha vertical que representa al objeto, un punto para el centro de curvatura del espejo y otro para el foco.
 - d) Desde el extremo superior del objeto se traza un rayo paralelo al eje óptico que al llegar al espejo se refleja
 - hacia el foco, si el espejo es cóncavo;
 - alejándose del foco (de modo que su prolongación pasa por el foco), si el espejo es convexo.
 - e) Se traza un segundo rayo que pasa por el centro de curvatura del espejo sin desviarse.
 - f) Si ambos rayos se cortan, se dibuja en el punto de corte la imagen. Si no se cortan, se prolongan los rayos y se dibuja la imagen en el punto donde se cortan las prolongaciones.
3. En los problemas de lentes:
 - a) Se usa la ecuación de las lentes que relaciona las distancias del objeto y de la imagen a la lente con la distancia focal:

$$\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = \frac{1}{f'}$$

- b) Se usa la ecuación del aumento lateral en los espejos.

$$A_L = \frac{y'}{y} = \frac{s'}{s}$$

- c) Se dibuja un esquema que contiene un eje óptico horizontal, la lente y una flecha vertical que representa al objeto, un punto para el foco objeto y otro para el foco imagen.
- d) Desde el extremo superior del objeto se traza un rayo paralelo al eje óptico que al llegar a la lente se refracta
 - hacia el foco imagen, si la lente es convergente,
 - alejándose del foco (de modo que su prolongación pasa por el foco objeto), si la lente es divergente.
- e) Se traza un segundo rayo que pasa por el centro de la lente sin desviarse.
- f) Si ambos rayos se cortan, se dibuja en el punto de corte la imagen. Si no se cortan, se prolongan los rayos y se dibuja la imagen en el punto donde se cortan las prolongaciones.

● RECOMENDACIONES

1. Se hará una lista con los datos, pasándolos al Sistema Internacional si no lo estuviesen.

2. Se hará otra lista con las incógnitas.
3. Se dibujará un croquis de la situación, procurando que las distancias del croquis sean coherentes con ella.
4. Se hará una lista de las ecuaciones que contengan las incógnitas y alguno de los datos, mencionando a la ley o principio al que se refieren.
5. En caso de tener alguna referencia, al terminar los cálculos se hará un análisis del resultado para ver si es el esperado.
6. En muchos problemas las cifras significativas de los datos son incoherentes. Se resolverá el problema suponiendo que los datos que aparecen con una o dos cifras significativas tienen la misma precisión que el resto de los datos (por lo general tres cifras significativas), y al final se hará un comentario sobre las cifras significativas del resultado.

● ACLARACIONES

Los datos de los enunciados de los problemas no suelen tener un número adecuado de cifras significativas, bien porque el redactor piensa que la Física es una rama de las Matemáticas y los números enteros son números «exactos» (p. ej. la velocidad de la luz: $3 \cdot 10^8$ m/s cree que es 300 000 000,000000 000 000 000... m/s) o porque aún no se ha enterado de que se puede usar calculadora en el examen y le parece más sencillo usar $3 \cdot 10^8$ que 299 792 458 m/s).

Por eso he supuesto que los datos tienen un número de cifras significativas razonables, casi siempre tres cifras significativas. Menos cifras darían resultados, en ciertos casos, con una incertidumbre desmedida. Así que cuando tomo un dato como $c = 3 \cdot 10^8$ m/s y lo reescribo como:

Cifras significativas: 3

$$c = 3,00 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

Lo que quiero indicar es que supongo que el dato original tiene tres cifras significativas (no que las tenga en realidad) para poder realizar los cálculos con una incertidumbre más pequeña que la que tendría en ese caso. ($3 \cdot 10^8$ m/s tiene una sola cifra significativa, y una incertidumbre relativa del 30 %. Como las incertidumbres se suelen acumular a lo largo del cálculo, la incertidumbre final sería inadmisiblemente. Entonces, ¿para qué realizar los cálculos? Con una estimación sería suficiente).

◇ PROBLEMAS

● DIOPTRIO PLANO

1. Un rayo de luz de frecuencia $5 \cdot 10^{14}$ Hz incide con un ángulo de incidencia de 30° sobre una lámina de vidrio de caras plano-paralelas de espesor 10 cm. Sabiendo que el índice de refracción del vidrio es 1,50 y el del aire 1,00:
 - a) Enuncia las leyes de la refracción y dibuja la marcha de los rayos en el aire y en el interior de la lámina de vidrio.
 - b) Calcula la longitud de onda de la luz en el aire y en el vidrio, y la longitud recorrida por el rayo en el interior de la lámina.
 - c) Halla el ángulo que forma el rayo de luz con la normal cuando emerge de nuevo al aire.

Dato: $c = 3,00 \cdot 10^8$ m/s (P.A.U. Set. 14)
Rta.: b) $\lambda(\text{aire}) = 600 \text{ nm}$; $\lambda(\text{vidrio}) = 400 \text{ nm}$; $L = 10,6 \text{ cm}$; c) $\theta_{r2} = 30^\circ$

Datos

Frecuencia del rayo de luz
 Ángulo de incidencia
 Espesor de la lámina de vidrio
 Índice de refracción del vidrio

Cifras significativas: 3

$f = 5,00 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$
 $\theta_{i1} = 30,0^\circ$
 $e = 10,0 \text{ cm} = 0,100 \text{ m}$
 $n_v = 1,50$

Datos

Índice de refracción del aire
Velocidad de la luz en el vacío

Incógnitas

Longitud de onda de luz en el aire y en el vidrio
Longitud recorrida por el rayo de luz en el interior de la lámina
Ángulo de desviación del rayo al salir de la lámina

Ecuaciones

Índice de refracción de un medio i en el que la luz se desplaza a la velocidad v_i

$$n_i = \frac{c}{v_i}$$

Relación entre la velocidad v , la longitud de onda λ y la frecuencia f

$$v = \lambda \cdot f$$

Ley de Snell de la refracción

$$n_i \cdot \text{sen } \theta_i = n_r \cdot \text{sen } \theta_r$$

Cifras significativas: 3

$$n_a = 1,00$$

$$c = 3,00 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

$$\lambda_a, \lambda_v$$

$$L$$

$$\theta_{r2}$$

Solución:

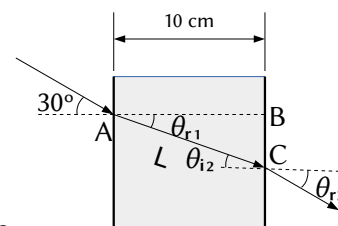
a) Las leyes de Snell de la refracción son:

1ª El rayo incidente, el rayo refractado y la normal están en el mismo plano.

2ª La relación matemática entre los índices de refracción n_i y n_r de los medios incidente y refractado y los ángulos de incidencia y refracción θ_i y θ_r , es:

$$n_i \cdot \text{sen } \theta_i = n_r \cdot \text{sen } \theta_r$$

En la figura se representa la trayectoria de la luz. El rayo incidente en el punto A con un ángulo de incidencia $\theta_{i1} = 30^\circ$ pasa del aire al vidrio dando un rayo refractado que forma el primer ángulo de refracción θ_{r1} y el segundo ángulo de incidencia θ_{i2} entre el vidrio y el aire. Finalmente sale de la lámina de vidrio por el punto B con el segundo ángulo de refracción θ_{r2} .



b) La velocidad de la luz en el aire es:

$$v_a = \frac{c}{n_a} = \frac{3,00 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{1,00} = 3,00 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

Por tanto, la longitud de onda de la luz en el aire es:

$$\lambda_a = \frac{v_a}{f} = \frac{3,00 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{5,00 \cdot 10^{14} \text{ s}^{-1}} = 6,00 \cdot 10^{-7} \text{ m} = 600 \text{ nm}$$

La velocidad de la luz en el vidrio es:

$$v_v = \frac{c}{n_v} = \frac{3,00 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{1,50} = 2,00 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

Por tanto, la longitud de onda de la luz en el vidrio es:

$$\lambda_v = \frac{v_v}{f} = \frac{2,00 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{5,00 \cdot 10^{14} \text{ s}^{-1}} = 4,00 \cdot 10^{-7} \text{ m} = 400 \text{ nm}$$

Como el espesor de la lámina es de 10 cm, la longitud recorrida por el rayo es la hipotenusa L del triángulo ABC.

El primer ángulo de refracción θ_{r1} se puede calcular aplicando la ley de Snell

$$1,00 \cdot \text{sen } 30^\circ = 1,50 \cdot \text{sen } \theta_{r1}$$

$$\text{sen } \theta_{r1} = \frac{1,00 \cdot \text{sen } 30^\circ}{1,50} = 0,333$$

$$\theta_{r1} = \arcsen 0,333 = 19,5^\circ$$

Por tanto la hipotenusa L vale

$$L = \frac{e}{\cos \theta_{r1}} = \frac{10,0 \text{ [cm]}}{\cos 19,5^\circ} = 10,6 \text{ cm}$$

c) Como la lámina de vidrio es de caras paralelas, el segundo ángulo de incidencia a_{i2} es igual al primer ángulo de refracción:

$$\theta_{i2} = \theta_{r1} = 19,5^\circ$$

Para calcular el ángulo con el que sale de la lámina, se vuelve a aplicar la ley de Snell entre el vidrio (que ahora es el medio incidente) y el aire (que es el medio refractado):

$$1,50 \cdot \text{sen } 19,5^\circ = 1,00 \cdot \text{sen } \theta_{r2}$$

$$\text{sen } \theta_{r2} = \frac{1,50 \cdot \text{sen } 19,5^\circ}{1,00} = 0,500$$

$$\theta_{r2} = \arcsen 0,500 = 30,0^\circ$$

Análisis: Este resultado es correcto porque el rayo sale paralelo al rayo incidente original.

2. Un rayo de luz pasa del agua (índice de refracción $n = 4/3$) al aire ($n = 1$). Calcula:
- El ángulo de incidencia si los rayos reflejado y refractado son perpendiculares entre sí.
 - El ángulo límite.
 - ¿Hay ángulo límite si la luz incide del aire al agua?

(P.A.U. Jun. 13)

Rta.: a) $\theta_i = 36,9^\circ$; b) $\lambda = 48,6^\circ$

Datos

Índice de refracción del aire

Índice de refracción del agua

Ángulo entre el rayo refractado y el reflejado

Incógnitas

Ángulo de incidencia

Ángulo límite

Ecuaciones

Ley de Snell de la refracción

Cifras significativas: 3

$$n = 1,00$$

$$n_a = 4 / 3 = 1,33$$

$$\theta_i = 90,0^\circ$$

$$\theta_i$$

$$\lambda$$

$$n_i \cdot \text{sen } \theta_i = n_r \cdot \text{sen } \theta_r$$

Solución:

a) Aplicando la ley de Snell de la refracción:

$$1,33 \cdot \text{sen } \theta_i = 1,00 \cdot \text{sen } \theta_r$$

A la vista del dibujo debe cumplirse que

$$\theta_r + 90^\circ + \theta_{rx} = 180^\circ$$

Como el ángulo de reflexión θ_{rx} es igual al ángulo de incidencia θ_i , la ecuación anterior se convierte en:

$$\theta_i + \theta_r = 90^\circ$$

Es decir, que el ángulo de incidencia θ_i y el de refracción θ_r son complementarios.

El seno de un ángulo es igual al coseno de su complementario. Entonces la primera ecuación queda:

$$1,33 \cdot \text{sen } \theta_i = \text{sen } \theta_r = \cos \theta_i$$

$$\tan \theta_i = \frac{1}{1,33} = 0,75$$

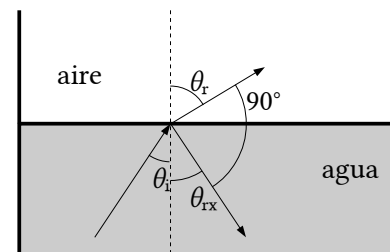
$$\theta_i = \arctan 0,75 = 36,9^\circ$$

b) Ángulo límite λ es el ángulo de incidencia tal que el de refracción vale 90°

$$1,33 \cdot \text{sen } \lambda = 1,00 \cdot \text{sen } 90,0^\circ$$

$$\text{sen } \lambda = 1,00 / 1,33 = 0,75$$

$$\lambda = \arcsen 0,75 = 48,6^\circ$$



c) No. Cuando la luz pasa del aire al agua, el ángulo de refracción es menor que el de incidencia. Para conseguir un ángulo de refracción de 90° el ángulo de incidencia tendría que ser mayor que 90° y no estaría en el aire.

También puede deducirse de la ley de Snell.

$$1,00 \cdot \sin \lambda_1 = 1,33 \cdot \sin 90^\circ$$

$$\sin \lambda_1 = 1,33 / 1,00 > 1$$

Es imposible. El seno de un ángulo no puede ser mayor que uno.

3. Sobre un prisma equilátero de ángulo 60° (ver figura), incide un rayo luminoso monocromático que forma un ángulo de 50° con la normal a la cara AB. Sabiendo que en el interior del prisma el rayo es paralelo a la base AC:

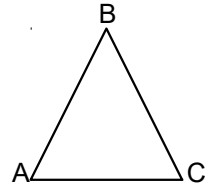
a) Calcula el índice de refracción del prisma.

b) Determina el ángulo de desviación del rayo al salir del prisma, dibujando la trayectoria que sigue el rayo.

c) Explica si la frecuencia y la longitud de onda correspondientes al rayo luminoso son distintas, o no, dentro y fuera del prisma.

Dato: $n(\text{aire}) = 1$

Rta.: a) $n_p = 1,5$; b) $\theta_{r2} = 50^\circ$



(P.A.U. Set. 11)

Datos

Ángulos del triángulo equilátero

Ángulo de incidencia

Índice de refracción del aire

Incógnitas

Índice de refracción del prisma

Ángulo de desviación del rayo al salir del prisma

Ecuaciones

Ley de Snell de la refracción

Cifras significativas: 2

$$\theta = 60^\circ$$

$$\theta_i = 50^\circ$$

$$n_a = 1,0$$

$$n_p$$

$$\theta_{r2}$$

$$n_i \cdot \sin \theta_i = n_r \cdot \sin \theta_r$$

Solución:

a) En la ley de Snell de la refracción

$$n_i \cdot \sin \theta_i = n_r \cdot \sin \theta_r$$

n_i y n_r representan los índices de refracción de los medios incidente y refractado

θ_i y θ_r representan los ángulos de incidencia y refracción que forma cada rayo con la normal a la superficie de separación entre los dos medios.

El primer ángulo de refracción θ_{r1} , que forma el rayo de luz refractado paralelo a la base del prisma, vale 30° , ya que es el complementario al de 60° del triángulo equilátero.

$$n_p = n_r = \frac{n_i \cdot \sin \theta_{i1}}{\sin \theta_{r1}} = \frac{1,0 \cdot \sin 50^\circ}{\sin 30^\circ} = 1,5$$

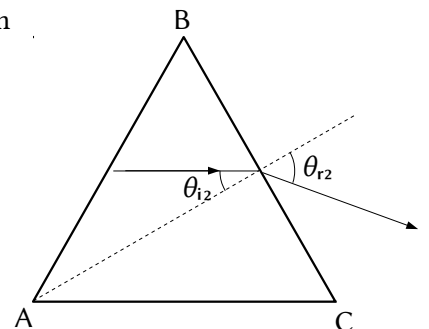
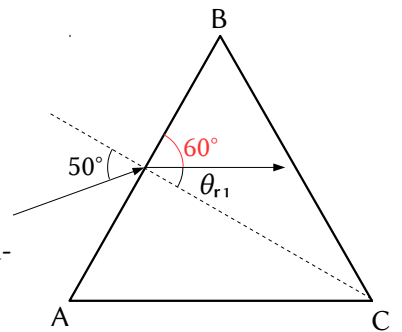
b) Cuando el rayo sale del prisma, el ángulo de incidencia θ_{i2} del rayo con la normal al lado BC vale 30° . Volviendo a aplicar la ley de Snell

$$\sin \theta_{r2} = \frac{n_i \cdot \sin \theta_{i2}}{n_r} = \frac{1,5 \cdot \sin 30^\circ}{1,0} = 0,77$$

$$\theta_{r2} = \arcsen 0,77 = 50^\circ$$

c) La frecuencia f de una onda electromagnética es una característica de la misma y no varía con el medio.

La longitud de onda λ está relacionada con ella por



$$c = \lambda \cdot f$$

La velocidad de la luz en un medio transparente es siempre menor que en el vacío. El índice de refracción del medio es el cociente entre ambas velocidades.

$$n = \frac{c}{v}$$

La velocidad de la luz en el aire es prácticamente igual a la del vacío, mientras que en el prisma es 1,5 veces menor. Como la frecuencia es la misma, la longitud de onda (que es inversamente proporcional a la frecuencia) en el prisma es 1,5 veces menor que en el aire.

● **ESPEJOS**

1. Un espejo cóncavo tiene 50 cm de radio. Un objeto de 5 cm se coloca a 20 cm del espejo:
 - a) Dibuja la marcha de los rayos.
 - b) Calcula la posición, tamaño y naturaleza de la imagen.
 - c) Dibuja una situación en la que no se forme imagen del objeto.

(P.A.U. Jun. 14)

Rta.: b) $s' = 1,00$ m; $y' = 25$ cm; imagen virtual, derecha y mayor.

Datos (convenio de signos DIN)

Radio de curvatura del espejo

Tamaño del objeto

Posición del objeto

Incógnitas

Posición de la imagen

Tamaño de la imagen

Otros símbolos

Distancia focal del espejo

Ecuaciones

Relación entre la posición de la imagen y la del objeto en los espejos

Aumento lateral en los espejos

Relación entre la distancia focal y el radio de curvatura

Cifras significativas: 2

$$R = -50 \text{ cm} = -0,50 \text{ m}$$

$$y = 5,0 \text{ cm} = 0,050 \text{ m}$$

$$s = -20 \text{ cm} = -0,20 \text{ m}$$

$$s'$$

$$y'$$

$$f$$

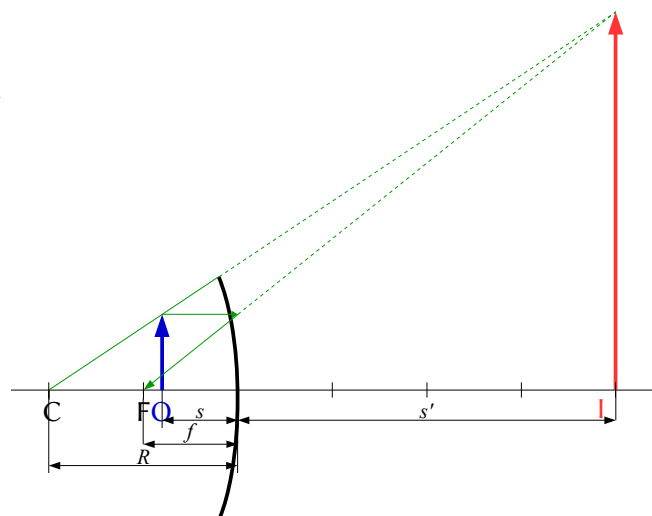
$$\frac{1}{s'} + \frac{1}{s} = \frac{1}{f}$$

$$A_L = \frac{y'}{y} = \frac{-s'}{s}$$

$$f = R / 2$$

Solución:

- a) En el dibujo se representa el objeto **O** antes del espejo y desde su punto superior se dibujan dos rayos:
 - Uno horizontal hacia el espejo que se refleja de manera que el rayo reflejado pasa por el foco **F** (que se encuentra a la mitad de la distancia entre el espejo y su centro **C**).
 - Otro hacia el espejo que se refleja sin desviarse pasando por el centro **C** de curvatura del espejo.
 Como los rayos no se cortan, se prolongan al otro lado del espejo hasta que sus prolongaciones se cortan. El punto de corte es el correspondiente a la imagen **I**.



- b) Por el convenio de signos, los puntos situados a la izquierda del espejo tienen signo negativo. Se usa la ecuación de los espejos:

$$\frac{1}{s'} + \frac{1}{s} = \frac{1}{f}$$

Se calcula la distancia focal, que es la mitad del radio del espejo.

$$f = R / 2 = -0,50 \text{ [m]} / 2 = -0,25 \text{ m}$$

Se sustituyen los datos:

$$\frac{1}{s'} + \frac{1}{-0,20 \text{ [m]}} = \frac{1}{-0,25 \text{ [m]}}$$

Y se calcula la posición de la imagen:

$$s' = +1,0 \text{ m}$$

La imagen se encuentra a 1,0 m a la derecha del espejo.

Para calcular la altura de la imagen se usa la ecuación del aumento lateral:

$$A_L = \frac{y'}{y} = \frac{-s'}{s} = \frac{-1,0 \text{ [m]}}{-0,20 \text{ [m]}} = 5,0$$

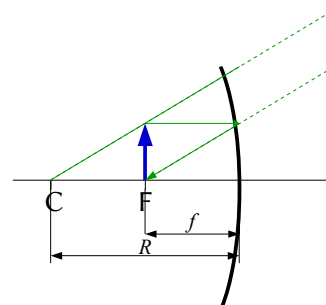
Y se calcula la altura de la imagen:

$$y' = A_L \cdot y = 5,0 \cdot 5,0 \text{ cm} = 25 \text{ cm}$$

La imagen es virtual ($s' > 0$), derecha ($A_L > 0$) y mayor ($|A_L| > 1$).

Análisis: El resultado del cálculo coincide con el dibujo.

c) Cuando el objeto se encuentra en el foco, los rayos salen paralelos y no se cortan, por lo que no se forma imagen.



2. Un objeto de 1,5 cm de altura está situado a 15 cm de un espejo esférico convexo de radio 20 cm. Determina la posición, tamaño y naturaleza de la imagen:
- Gráficamente.
 - Analíticamente.
 - ¿Se pueden obtener imágenes reales con un espejo convexo?

(P.A.U. Set. 09)

Rta.: b) $s' = +6,0 \text{ cm}$; $y' = 6,0 \text{ mm}$

Datos (convenio de signos DIN)

Radio de curvatura del espejo convexo

Tamaño del objeto

Posición del objeto

Incógnitas

Posición de la imagen

Tamaño de la imagen

Otros símbolos

Distancia focal del espejo

Ecuaciones

Relación entre la posición de la imagen y la del objeto en los espejos

Aumento lateral en los espejos

Relación entre la distancia focal y el radio de curvatura

Cifras significativas: 2

$R = +0,20 \text{ m}$

$y = 1,5 \text{ cm} = 0,015 \text{ m}$

$s = -0,15 \text{ m}$

s'

y'

f

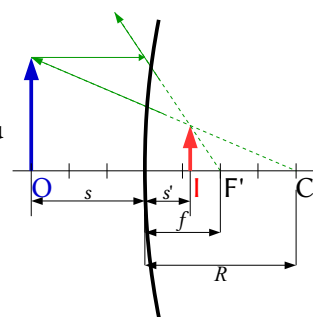
$$\frac{1}{s'} + \frac{1}{s} = \frac{1}{f}$$

$$A_L = \frac{y'}{y} = \frac{-s'}{s}$$

$$f = R / 2$$

Solución:

- a) En el dibujo se representa el objeto O antes del espejo y desde su punto superior se dibujan dos rayos:
- Uno horizontal hacia el espejo que se refleja de manera que el rayo reflejado pasa por el foco F (que se encuentra a la mitad de la distancia entre el espejo y su centro C).



- Otro hacia el espejo que se refleja sin desviarse pasando por el centro C de curvatura del espejo. Como los rayos no se cortan, se prolongan al otro lado del espejo hasta que sus prolongaciones se cortan. El punto de corte es el correspondiente a la imagen I.

b) Por el convenio de signos, los puntos situados a la izquierda del espejo tienen signo negativo. Se usa la ecuación de los espejos:

$$\frac{1}{s'} + \frac{1}{s} = \frac{1}{f}$$

Se calcula la distancia focal, que es la mitad del radio del espejo.

$$f = R / 2 = 0,20 \text{ [m]} / 2 = 0,10 \text{ m}$$

Se sustituyen los datos:

$$\frac{1}{s'} + \frac{1}{-0,15 \text{ [m]}} = \frac{1}{0,10 \text{ [m]}}$$

Y se calcula la posición de la imagen:

$$s' = 0,060 \text{ m}$$

La imagen se encuentra a 6,0 cm a la derecha del espejo.

Para calcular la altura de la imagen se usa la ecuación del aumento lateral:

$$A_L = \frac{y'}{y} = \frac{-s'}{s} = \frac{-0,060 \text{ [m]}}{-0,15 \text{ [m]}} = 0,40$$

Y se calcula la altura de la imagen:

$$y' = A_L \cdot y = 0,40 \cdot 1,5 \text{ cm} = 0,60 \text{ cm} = 6,0 \text{ mm}$$

La imagen es virtual ($s' > 0$), derecha ($A_L > 0$) y menor ($|A_L| < 1$).

Análisis: El resultado del cálculo coincide con el dibujo.

c) Las imágenes producidas por espejos convexos son siempre virtuales. De la ecuación de los espejos:

$$\frac{1}{s'} + \frac{1}{s} = \frac{1}{f}$$

$$\frac{1}{s'} = \frac{1}{f} - \frac{1}{s}$$

$$s' = \frac{1}{\frac{1}{f} - \frac{1}{s}}$$

Por los criterios de signos, $s < 0$, y en los espejos convexos $f > 0$, por lo que

$$\frac{1}{f} - \frac{1}{s} > 0$$

Por tanto, $s' > 0$ siempre. La imagen se va a formar a la derecha del espejo y va a ser virtual (los rayos de luz no atraviesan los espejos)

3. Un objeto de 5 cm de altura está situado a una distancia x del vértice de un espejo esférico cóncavo, de 1 m de radio de curvatura. Calcula la posición y tamaño de la imagen:

a) Si $x = 75 \text{ cm}$

b) Si $x = 25 \text{ cm}$

En los dos casos dibuja la marcha de los rayos.

(P.A.U. Set. 04)

Rta.: a) $s' = -1,5 \text{ m}$; $y' = -10 \text{ cm}$; b) $s' = 0,5 \text{ m}$; $y' = 10 \text{ cm}$.

Datos (convenio de signos DIN)

Radio de curvatura del espejo

Tamaño del objeto

Posición del objeto: en el primer caso
 en el segundo caso**Incógnitas**

Posición de la imagen en ambos casos

Tamaño de la imagen en ambos casos

Otros símbolos

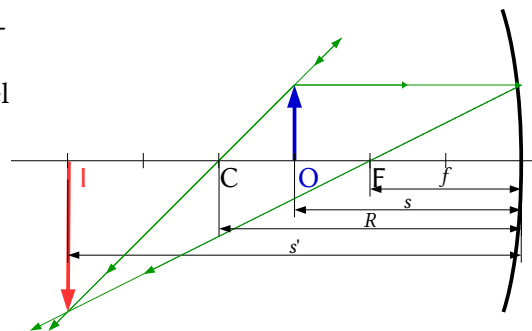
Distancia focal del espejo

Ecuaciones

Relación entre la posición de la imagen y la del objeto en los espejos

Aumento lateral en los espejos

Relación entre la distancia focal y el radio de curvatura

Solución:a) En el dibujo se representa el objeto **O** antes del espejo y desde su punto superior se dibujan dos rayos:- Uno horizontal hacia el espejo que se refleja de manera que el rayo reflejado pasa por el foco **F** (que se encuentra a la mitad de la distancia entre el espejo y su centro **C**).- Otro hacia el espejo que se refleja sin desviarse pasando por el centro **C** de curvatura del espejo.El punto de corte es el correspondiente a la imagen **I**.

Por el convenio de signos, los puntos situados a la izquierda del espejo tienen signo negativo.

Se usa la ecuación de los espejos:

$$\frac{1}{s'} + \frac{1}{s} = \frac{1}{f}$$

Se calcula la distancia focal, que es la mitad del radio del espejo.

$$f = R / 2 = -1,0 \text{ [m]} / 2 = -0,50 \text{ m}$$

Se sustituyen los datos:

$$\frac{1}{s'_1} + \frac{1}{-0,75 \text{ [m]}} = \frac{1}{-0,50 \text{ [m]}}$$

Y se calcula la posición de la imagen:

$$s'_1 = -1,5 \text{ m}$$

La imagen se encuentra a 1,5 m a la izquierda del espejo.

Para calcular la altura de la imagen se usa la ecuación del aumento lateral:

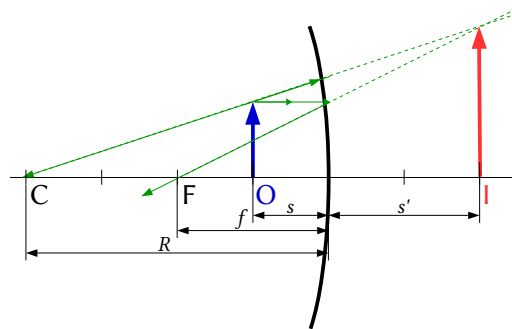
$$A_L = \frac{y'}{y} = \frac{-s'}{s} = \frac{1,5 \text{ [m]}}{-0,75 \text{ [m]}} = -2,0$$

Y se calcula la altura de la imagen:

$$y'_2 = A_L \cdot y = -2,0 \cdot 5,0 \text{ cm} = -10 \text{ cm}$$

La imagen es real ($s' < 0$), invertida ($A_L < 0$) y mayor ($|A_L| > 1$).

b) Se aplican las indicaciones del apartado anterior, pero teniendo en cuenta que como los rayos no se cortan, se prolongan

**Cifras significativas: 2** $R = -1,0 \text{ m}$ $y = 5,0 \text{ cm} = 0,050 \text{ m}$ $s_1 = -75 \text{ cm} = -0,75 \text{ m}$ $s_2 = -25 \text{ cm} = -0,25 \text{ m}$ s'_1, s'_2 y'_1, y'_2 f

$$\frac{1}{s'} + \frac{1}{s} = \frac{1}{f}$$

$$A_L = \frac{y'}{y} = \frac{-s'}{s}$$

$$f = R / 2$$

gan al otro lado del espejo hasta que se cortan. El punto de corte es el punto correspondiente a la imagen **I**. Los resultados son:

$$\frac{1}{s'_2} + \frac{1}{-0,25 \text{ [m]}} = \frac{1}{-0,50 \text{ [m]}}$$

$$s'_2 = +0,50 \text{ m}$$

La imagen se encuentra a 0,50 m a la derecha del espejo.

$$A_L = \frac{y'}{y} = \frac{-s'}{s} = \frac{-0,50 \text{ [m]}}{-0,25 \text{ [m]}} = 2,0$$

$$y'_2 = A_L \cdot y = 2,0 \cdot 5,0 \text{ cm} = 10 \text{ cm}$$

La imagen es virtual ($s' > 0$), derecha ($A_L > 0$) y mayor ($|A_L| > 1$).

Análisis: En ambos casos, los resultados de los cálculos coinciden con los dibujos.

4. Un espejo esférico cóncavo tiene un radio de curvatura de 0,5 m. Determina analítica y gráficamente la posición y aumento de la imagen de un objeto de 5 cm de altura situado en dos posiciones diferentes:

- A 1 m del espejo.
- A 0,30 m del espejo.

(P.A.U. Set. 05)

Rta.: a) $s' = -0,33 \text{ m}$; $A_L = -0,33$; b) $s' = -1,5 \text{ m}$; $A_L = -5,0$

Datos (convenio de signos DIN)

Radio de curvatura del espejo
Tamaño del objeto
Posición del objeto: en el primer caso
 en el segundo caso

Incógnitas

Posición de la imagen en ambos casos
Aumento de la imagen en ambos casos

Otros símbolos

Distancia focal del espejo

Ecuaciones

Relación entre la posición de la imagen y la del objeto en los espejos

Aumento lateral en los espejos

Relación entre la distancia focal y el radio de curvatura

Cifras significativas: 2

$R = -0,50 \text{ m}$
 $y = 5,0 \text{ cm} = 0,050 \text{ m}$
 $s_1 = -1,0 \text{ m}$
 $s_2 = -0,30 \text{ m}$

s'_1, s'_2
 A_1, A_2

f

$$\frac{1}{s'} + \frac{1}{s} = \frac{1}{f}$$

$$A_L = \frac{y'}{y} = \frac{-s'}{s}$$

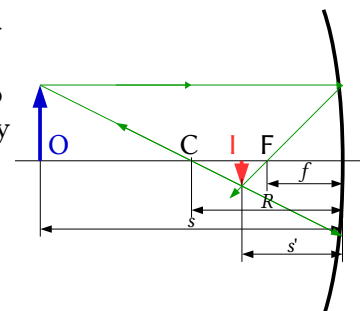
$$f = R / 2$$

Solución:

a) En el dibujo se representa el objeto **O** antes del espejo y desde su punto superior se dibujan dos rayos:

- Uno horizontal hacia el espejo que se refleja de manera que el rayo reflejado pasa por el foco **F** (que se encuentra a la mitad de la distancia entre el espejo y su centro **C**).
- Otro hacia el espejo que se refleja sin desviarse pasando por el centro **C** de curvatura del espejo.

El punto de corte es el correspondiente a la imagen **I**.



Por el convenio de signos, los puntos situados a la izquierda del espejo tienen signo negativo.

Se usa la ecuación de los espejos:

$$\frac{1}{s'} + \frac{1}{s} = \frac{1}{f}$$

Se calcula la distancia focal, que es la mitad del radio del espejo.

$$f = R / 2 = -0,50 \text{ [m]} / 2 = -0,25 \text{ m}$$

Se sustituyen los datos:

$$\frac{1}{s'_2} + \frac{1}{-1,0 \text{ [m]}} = \frac{1}{-0,25 \text{ [m]}}$$

Y se calcula la posición de la imagen:

$$s'_1 = -0,33 \text{ m}$$

La imagen se encuentra a 33 cm a la izquierda del espejo.

Para calcular la altura de la imagen se usa la ecuación del aumento lateral:

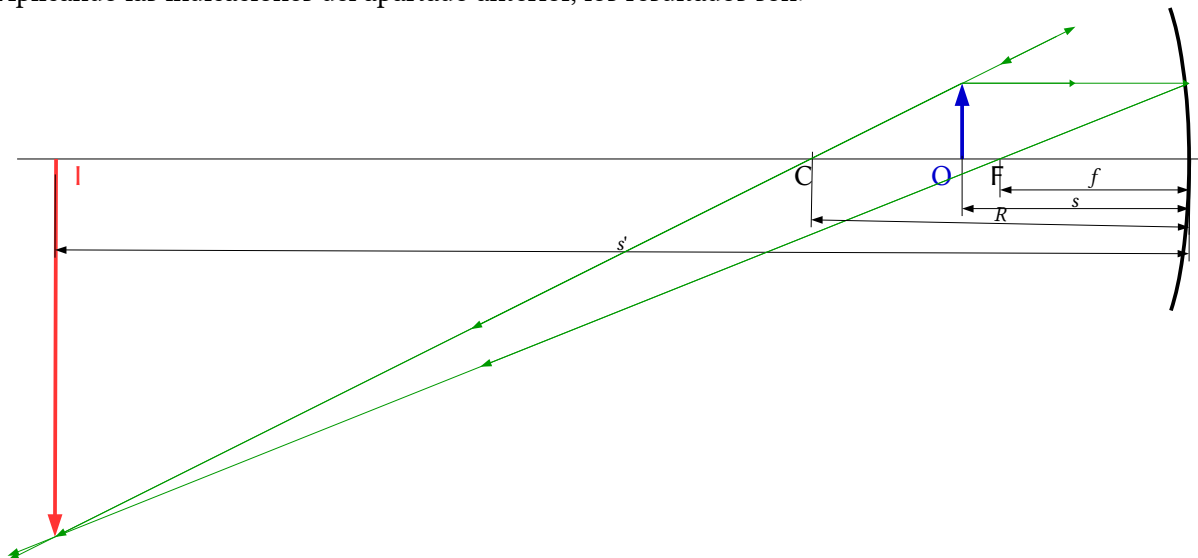
$$A_L = \frac{y'}{y} = \frac{-s'}{s} = \frac{0,33 \text{ [m]}}{-1,0 \text{ [m]}} = -0,33$$

Y se calcula la altura de la imagen:

$$y' = A_L \cdot y = -0,33 \cdot 5,0 \text{ cm} = -1,7 \text{ cm}$$

La imagen es real ($s' < 0$), invertida ($A_L < 0$) y menor ($|A_L| < 1$).

b) Aplicando las indicaciones del apartado anterior, los resultados son:



$$\frac{1}{s'_2} + \frac{1}{-0,30 \text{ [m]}} = \frac{1}{-0,25 \text{ [m]}}$$

$$s'_2 = -1,5 \text{ m}$$

La imagen se encuentra a 1,5 m a la izquierda del espejo.

$$A_L = \frac{y'}{y} = \frac{-s'}{s} = \frac{1,5 \text{ [m]}}{-0,30 \text{ [m]}} = -5,0$$

$$y' = A_L \cdot y = -5,0 \cdot 5,0 \text{ cm} = -25 \text{ cm}$$

La imagen es real ($s' < 0$), invertida ($A_L < 0$) y mayor ($|A_L| > 1$).

Análisis: En ambos casos, los resultados de los cálculos coinciden con los dibujos.

5. Dado un espejo esférico de 50 cm de radio y un objeto de 5 cm de altura situado sobre el eje óptico a una distancia de 30 cm del espejo, calcula analítica y gráficamente la posición y tamaño de la imagen:
- Si el espejo es cóncavo.
 - Si el espejo es convexo.

Rta.: a) $s'_1 = -1,5$ m; $y'_1 = -0,25$ m; b) $s'_2 = 0,14$ m; $y'_2 = 0,023$ m

Datos (convenio de signos DIN)

Radio de curvatura del espejo cóncavo

Radio de curvatura del espejo convexo

Tamaño del objeto

Posición del objeto

Incógnitas

Posición de las imágenes que dan ambos espejos

Tamaño de las imágenes que dan ambos espejos

Otros símbolos

Distancia focal del espejo

Ecuaciones

Relación entre la posición de la imagen y la del objeto en los espejos

Aumento lateral en los espejos

Relación entre la distancia focal y el radio de curvatura

Cifras significativas: 2

$R = -0,50$ m

$R = +0,50$ m

$y = 5,0$ cm = $0,050$ m

$s_1 = -0,30$ m

s'_1, s'_2

y'_1, y'_2

f

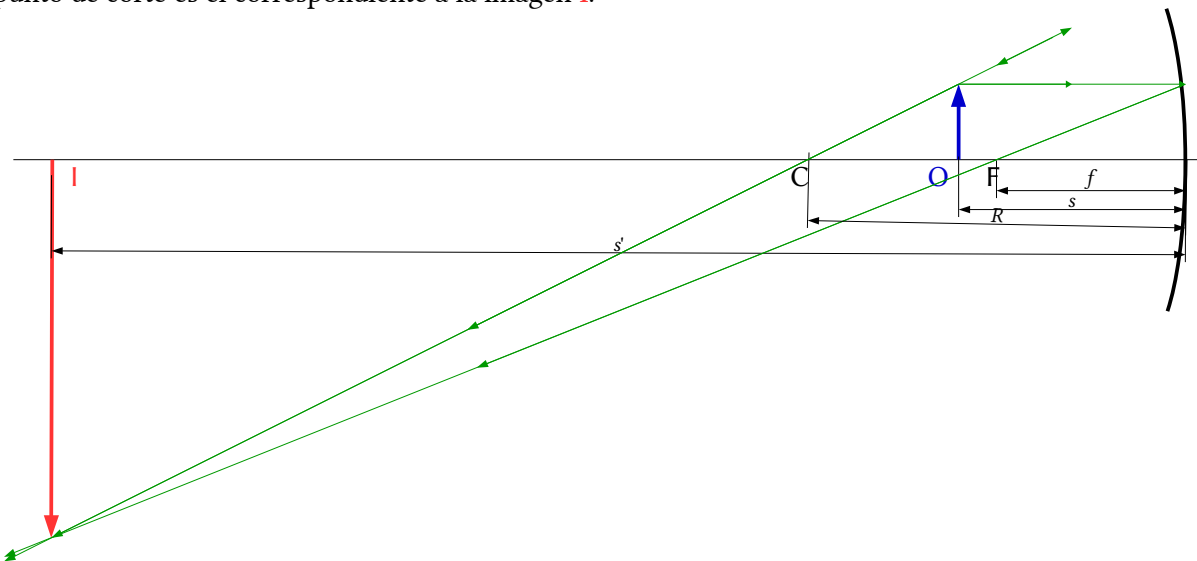
$$\frac{1}{s'} + \frac{1}{s} = \frac{1}{f}$$

$$A_L = \frac{y'}{y} = \frac{-s'}{s}$$

$$f = R / 2$$

Solución:

- a) En el dibujo se representa el objeto O antes del espejo y desde su punto superior se dibujan dos rayos:
- Uno horizontal hacia el espejo que se refleja de manera que el rayo reflejado pasa por el foco F (que se encuentra a la mitad de la distancia entre el espejo y su centro C).
 - Otro hacia el espejo que se refleja sin desviarse pasando por el centro C de curvatura del espejo.
- El punto de corte es el correspondiente a la imagen I .



Por el convenio de signos, los puntos situados a la izquierda del espejo tienen signo negativo. Se usa la ecuación de los espejos:

$$\frac{1}{s'} + \frac{1}{s} = \frac{1}{f}$$

Se calcula la distancia focal, que es la mitad del radio del espejo.

$$f = R / 2 = -0,50 \text{ [m]} / 2 = -0,25 \text{ m}$$

Se sustituyen los datos:

$$\frac{1}{s'_1} + \frac{1}{-0,30 \text{ [m]}} = \frac{1}{-0,25 \text{ [m]}}$$

Y se calcula la posición de la imagen:

$$s'_1 = -1,5 \text{ m}$$

La imagen se encuentra a 1,50 m a la izquierda del espejo.

Para calcular la altura de la imagen se usa la ecuación del aumento lateral:

$$A_L = \frac{y'}{y} = \frac{-s'}{s} = \frac{1,5 \text{ [m]}}{-0,30 \text{ [m]}} = -5,0$$

Y se calcula la altura de la imagen:

$$y' = A_L \cdot y = -5,0 \cdot 5,0 \text{ cm} = -25 \text{ cm} = -0,25 \text{ m}$$

La imagen es real ($s' < 0$), invertida ($A_L < 0$) y mayor ($|A_L| > 1$).

b) Se aplican las indicaciones del apartado anterior, pero teniendo en cuenta que como los rayos no se cortan, se prolongan al otro lado del espejo hasta que se cortan. El punto de corte es el correspondiente a la imagen I.

Los resultados son:

$$f = R / 2 = 0,50 \text{ [m]} / 2 = 0,25 \text{ m}$$

$$\frac{1}{s'_2} + \frac{1}{-0,30 \text{ [m]}} = \frac{1}{0,25 \text{ [m]}}$$

$$s'_2 = 0,14 \text{ m}$$

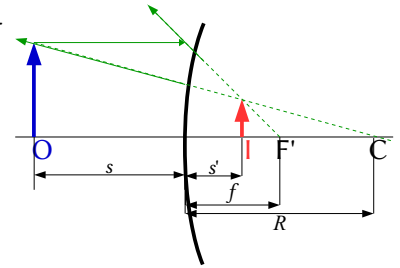
La imagen se encuentra a 0,14 m a la derecha del espejo.

$$A_L = \frac{y'}{y} = \frac{-s'}{s} = \frac{-0,14 \text{ [m]}}{-0,30 \text{ [m]}} = 0,45$$

$$y' = A_L \cdot y = 0,45 \cdot 5,0 \text{ cm} = 2,3 \text{ cm} = 0,023 \text{ m}$$

La imagen es virtual ($s' > 0$), derecha ($A_L > 0$) y menor ($|A_L| < 1$).

Análisis: En ambos casos, los resultados de los cálculos coinciden con los dibujos.



6. Un objeto de 3 cm está situado a 8 cm de un espejo esférico cóncavo y produce una imagen a 10 cm a la derecha del espejo:

- Calcula la distancia focal.
- Dibuja la marcha de los rayos y obtén el tamaño de la imagen.
- ¿En qué posición del eje hay que colocar el objeto para que no se forme imagen?

(P.A.U. Jun. 08)

Rta.: a) $f = -0,40 \text{ m}$; b) $y' = 3,8 \text{ cm}$

Datos (convenio de signos DIN)

Posición del objeto
Posición de la imagen
Tamaño del objeto

Incógnitas

Distancia focal del espejo
Tamaño de la imagen

Ecuaciones

Relación entre la posición de la imagen y la del objeto en los espejos

Aumento lateral en los espejos

Relación entre la distancia focal y el radio de curvatura

Cifras significativas: 3

$s = -8,00 \text{ cm} = -0,0800 \text{ m}$
 $s' = 10,0 \text{ cm} = -0,100 \text{ m}$
 $y = 3,00 \text{ cm} = 0,0300 \text{ m}$

f
 y'

$$\frac{1}{s'} + \frac{1}{s} = \frac{1}{f}$$

$$A_L = \frac{y'}{y} = \frac{-s'}{s}$$

$$f = R / 2$$

Solución:

a) Por el convenio de signos, los puntos situados a la izquierda del espejo tienen signo negativo. Se usa la ecuación de los espejos:

$$\frac{1}{s'} + \frac{1}{s} = \frac{1}{f}$$

Se sustituyen los datos:

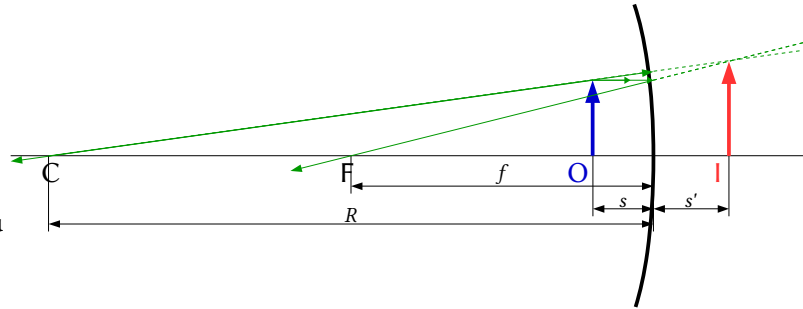
$$\frac{1}{0,100 \text{ [m]}} + \frac{1}{-0,080 \text{ [m]}} = \frac{1}{f}$$

Y se calcula la incógnita:

$$f = -0,400 \text{ m}$$

b) En el dibujo se representa el objeto **O** antes del espejo y desde su punto superior se dibujan dos rayos:

- Uno horizontal hacia el espejo que se refleja de manera que el rayo reflejado pasa por el foco **F** (que se encuentra a la mitad de la distancia entre el espejo y su centro **C**).
- Otro hacia el espejo que se refleja sin desviarse pasando por el centro **C** de curvatura del espejo.



Como los rayos no se cortan, se prolongan al otro lado del espejo hasta que sus prolongaciones se cortan. El punto de corte es el correspondiente a la imagen **I**.

Para calcular la altura de la imagen se usa la ecuación del aumento lateral:

$$A_L = \frac{y'}{y} = \frac{-s'}{s} = \frac{-0,100 \text{ [m]}}{-0,080 \text{ [m]}} = 1,25$$

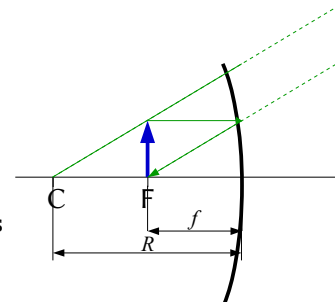
Y se calcula la altura de la imagen:

$$y' = A_L \cdot y = 1,25 \cdot 3,00 \text{ cm} = 3,75 \text{ cm} = 0,0375 \text{ m}$$

La imagen es virtual ($s' > 0$), derecha ($A_L > 0$) y mayor ($|A_L| > 1$).

Análisis: Los resultados están de acuerdo con el dibujo.

c) En el foco. Los rayos que salen de un objeto situado en el foco salen paralelos y no se cortan, por lo que no se forma imagen.



● LENTES

1. Un objeto de 1,5 cm de altura se sitúa a 15 cm de una lente divergente que tiene una focal de 10 cm. Determina la posición, tamaño y naturaleza de la imagen:
 - a) Gráficamente.
 - b) Analíticamente.
 - c) ¿Se pueden obtener imágenes reales con una lente divergente?

(P.A.U. Set. 09)

Rta.: b) $s' = -6,0 \text{ cm}$; $y' = 6,0 \text{ mm}$

Datos (convenio de signos DIN)

Tamaño del objeto
 Posición del objeto
 Distancia focal de la lente

Incógnitas

Posición de la imagen
 Tamaño de la imagen

Cifras significativas: 2

$y = 1,5 \text{ cm} = 0,015 \text{ m}$
 $s = -15 \text{ cm} = -0,15 \text{ m}$
 $f = -10 \text{ cm} = -0,10 \text{ m}$

s'
 y'

Ecuaciones

Relación entre la posición de la imagen y la del objeto en las lentes

$$\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = \frac{1}{f}$$

Aumento lateral en las lentes

$$A_L = \frac{y'}{y} = \frac{s'}{s}$$

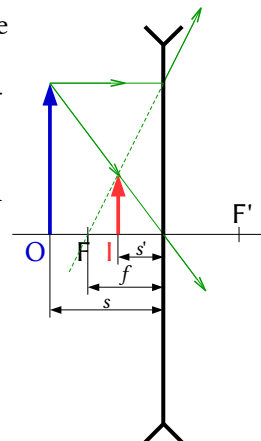
Solución:

a) En el dibujo se representa el objeto **O** antes de la lente y desde su punto superior se dibujan dos rayos:

- Uno horizontal hacia la lente que la atraviesa y se refracta de manera que la prolongación del rayo refractado pasa por el foco **F**.

- Otro hacia el centro de la lente que la atraviesa sin desviarse.

Como los rayos no se cortan, se prolongan hasta que sus prolongaciones se cortan. El punto de corte es el correspondiente a la imagen **I**.



b) Por el convenio de signos, los puntos situados a la izquierda de la lente tienen signo negativo. Para una lente divergente, $f = -0,10$ m.

Se usa la ecuación de las lentes:

$$\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = \frac{1}{f}$$

Se sustituyen los datos:

$$\frac{1}{s'} - \frac{1}{-0,15 \text{ [m]}} = \frac{1}{-0,10 \text{ [m]}}$$

Y se calcula la posición de la imagen:

$$s' = -0,060 \text{ m}$$

Para calcular la altura de la imagen se usa la ecuación del aumento lateral:

$$A_L = \frac{y'}{y} = \frac{s'}{s} = \frac{-0,060 \text{ [m]}}{-0,15 \text{ [m]}} = 0,40$$

Y se calcula la altura de la imagen:

$$y' = A_L \cdot y = 0,40 \cdot 0,015 \text{ m} = 0,0060 \text{ m} = 6,0 \text{ mm}$$

Análisis: La imagen es virtual ya que s' es negativa, es decir se forma a la izquierda de lente que es la zona donde se forman las imágenes virtuales en las lentes. El signo positivo del tamaño o indica que la imagen es derecha. Los resultados numéricos coinciden con el dibujo.

c) Las imágenes producidas por las lentes divergentes son siempre virtuales. De la ecuación de las lentes:

$$\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = \frac{1}{f}$$

$$\frac{1}{s'} = \frac{1}{f} + \frac{1}{s}$$

$$s' = \frac{1}{\frac{1}{f} + \frac{1}{s}}$$

Aplicando el criterio de signos, $s < 0$, y en las lentes divergentes $f < 0$, por lo que

$$\frac{1}{f} + \frac{1}{s} < 0$$

Por tanto, $s' < 0$ siempre. La imagen se va a formar a la izquierda de la lente y va a ser virtual (los rayos de luz atraviesan las lentes y forman las imágenes reales a la derecha de ellas)

2. Un objeto de 3 cm de altura se sitúa a 75 cm de una lente delgada convergente y produce una imagen a 37,5 cm a la derecha de la lente:
- Calcula la distancia focal.
 - Dibuja la marcha de los rayos y obtén el tamaño de la imagen.
 - ¿En qué posición del eje hay que colocar el objeto para que no se forme imagen?

(P.A.U. Jun. 08)

Rta.: a) $f = 0,25$ m; b) $y' = -1,5$ cm

Datos (convenio de signos DIN)

Tamaño del objeto
 Posición del objeto
 Posición de la imagen

Incógnitas

Distancia focal de la lente
 Tamaño de la imagen

Ecuaciones

Relación entre la posición de la imagen y la del objeto en las lentes

Aumento lateral en las lentes

Cifras significativas: 3

$y = 3,00$ cm = 0,0300 m
 $s = -75,0$ cm = -0,750 m
 $s' = 37,5$ cm = 0,375 m

f'
 y'

$$\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = \frac{1}{f}$$

$$A_L = \frac{y'}{y} = \frac{s'}{s}$$

Solución:

a) Por el convenio de signos, los puntos situados a la izquierda de la lente tienen signo negativo. Se usa la ecuación de las lentes:

$$\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = \frac{1}{f}$$

Se sustituyen los datos:

$$\frac{1}{0,375 \text{ [m]}} - \frac{1}{-0,750 \text{ [m]}} = \frac{1}{f}$$

Y se calcula la distancia focal:

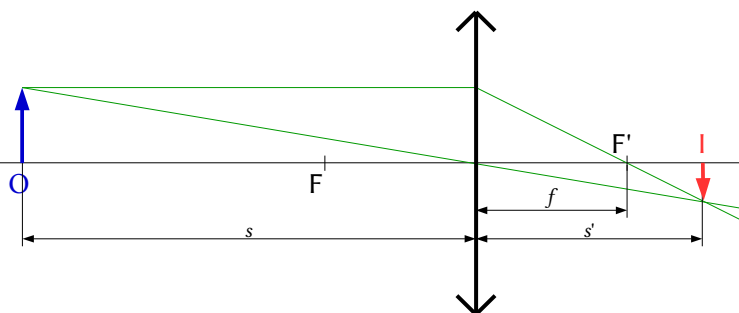
$$f = 0,250 \text{ m}$$

Análisis: La distancia focal da positiva, que está de acuerdo con el dato de que la lente es convergente.

b) En el dibujo se representa el objeto **O** antes de la lente y desde su punto superior se dibujan dos rayos:

- Uno horizontal hacia la lente que la atraviesa y se refracta de manera que el rayo refractado pasa por el foco F' .
- Otro hacia el centro de la lente que la atraviesa sin desviarse.

El punto de corte es el correspondiente a la imagen **I**.



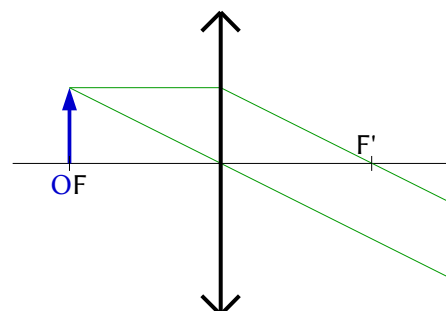
Para calcular la altura de la imagen se usa la ecuación del aumento lateral:

$$A_L = \frac{y'}{y} = \frac{s'}{s} = \frac{0,375 \text{ [m]}}{-0,750 \text{ [m]}} = -0,50$$

Y se calcula la altura de la imagen:

$$y' = A_L \cdot y = -0,50 \cdot 0,030 \text{ [m]} = -0,0150 \text{ m} = -1,50 \text{ cm}$$

Análisis: El signo negativo nos indica que la imagen es invertida. Los resultados numéricos coinciden con el dibujo.



c) En el foco. Los rayos que salen de un objeto situado en el foco salen paralelos y no se cortan, por lo que no se forma imagen.

3. Una lente divergente de distancia focal 10 cm forma una imagen de 2 cm de altura. Si el tamaño del objeto es 10 cm:
- Calcula la distancia a la que se encuentra el objeto de la lente.
 - Dibuja la marcha de los rayos.
 - La miopía es un defecto visual. Explica como se puede corregir.

(P.A.U. Set. 16)

Rta.: a) $s = 0,40$ m

Datos (convenio de signos DIN)

Distancia focal de la lente

Altura del objeto

Altura de la imagen

Incógnitas

Posición del objeto

Otros símbolos

Posición del objeto

Ecuaciones

Relación entre la posición de la imagen y la del objeto en las lentes

Aumento lateral en las lentes

Cifras significativas: 2

$$f = -10 \text{ cm} = -0,10 \text{ m}$$

$$y = 10 \text{ cm} = 0,10 \text{ m}$$

$$y' = 2,0 \text{ cm} = 0,020 \text{ m}$$

s

s'

$$\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = \frac{1}{f}$$

$$A_L = \frac{y'}{y} = \frac{s'}{s}$$

Solución:

- a) Del aumento lateral podemos establecer la relación matemática entre las distancias s del objeto a la lente y s' de la imagen a la lente.

$$A_L = \frac{s'}{s}$$

$$\frac{s'}{s} = \frac{0,020 \text{ [m]}}{0,10 \text{ [m]}} = 0,20$$

$$s' = 0,20 s$$

$$\frac{1}{0,20 \cdot s} - \frac{1}{s} = \frac{1}{-0,10 \text{ [m]}}$$

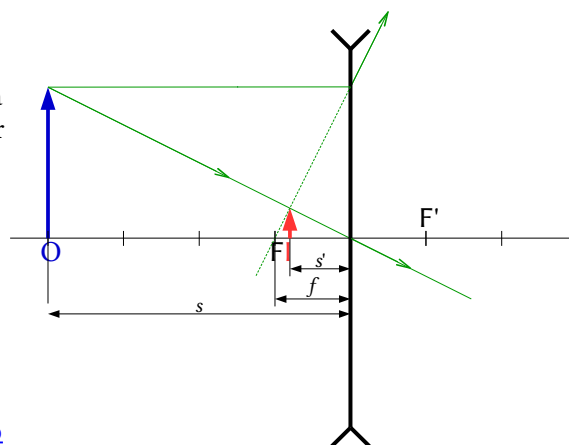
$$s' = -0,40 \text{ m}$$

- b) En el dibujo se representa el objeto O antes de la lente y desde su punto superior se dibujan dos rayos:

- Uno horizontal hacia la lente que la atraviesa y se refracta de manera que la prolongación del rayo refractado pasa por el foco F .

- Otro hacia el centro de la lente que la atraviesa sin desviarse.

Como los rayos no se cortan, el punto de corte de sus prolongaciones es el correspondiente a la imagen I .



- c) Con lentes divergentes. Véase:

<http://teleformacion.edu.aytolacoruna.es/FISICA/document/fisicaInteractiva/OptGeometrica/Instrumentos/ollo/ollo.htm#miopia>

4. Una lente convergente proyecta sobre una pantalla la imagen de un objeto. El aumento es de 10 y la distancia del objeto a la pantalla es de 2,7 m.
- Determina las posiciones de la imagen y del objeto.
 - Dibuja la marcha de los rayos.
 - Calcula la potencia de la lente.

(P.A.U. Set. 12)

Rta.: a) $s = -0,245$ m; $s' = 2,45$ m; c) $P = 4,48$ dioptrías

Datos (convenio de signos DIN)

Aumento de la lente

Distancia entre el objeto y su imagen

Incógnitas

Posición del objeto y de la imagen

Potencial de la lente

Otros símbolos

Distancia focal de la lente

Ecuaciones

Relación entre la posición de la imagen y la del objeto en las lentes

Aumento lateral en las lentes

Potencia de una lente

Cifras significativas: 3 $A_L = 10,0$ $d = 2,70$ m s, s' P f

$$\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = \frac{1}{f}$$

$$A_L = \frac{y'}{y} = \frac{s'}{s}$$

$$P = \frac{1}{f}$$

Solución:

a) Del aumento lateral podemos establecer la relación matemática entre las distancias s del objeto a la lente y s' de la imagen a la lente.

$$A_L = \frac{s'}{s}$$

$$s' = 10,0 s$$

La distancia del objeto a la pantalla (donde se forma la imagen) es la suma de esas dos distancias (sen tener en cuenta los signos):

$$|s| + |s'| = 2,70 \text{ m}$$

Teniendo en cuenta que, por el criterio de signos, la distancia del objeto a la lente es negativa, $s < 0$, pero la distancia de la imagen, cuando es real, a la lente es positiva $s' > 0$, queda

$$-s + s' = 2,70 \text{ m}$$

Aunque nos dicen que el aumento es 10, el signo correcto es -10 , por lo que, la relación con el signo adecuado entre las dos distancias es:

$$s' = -10,0 s$$

Sustituyendo s' y despejando s , queda

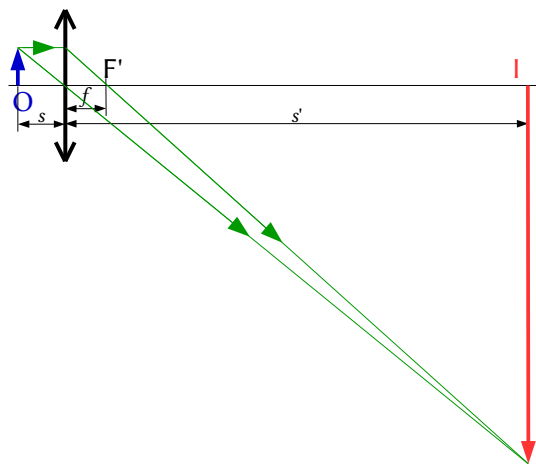
$$-s - 10,0 s = 2,70 \text{ m}$$

$$s = \frac{2,70 \text{ [m]}}{-11,0} = -0,245 \text{ m}$$

$$s' = -10,0 s = 2,45 \text{ m}$$

b) En el dibujo se representa el objeto O antes de la lente y desde su punto superior se dibujan dos rayos:

- Uno horizontal hacia la lente que la atraviesa y se refracta de manera que el rayo refractado pasa por el foco F' .
- Otro hacia el centro de la lente que la atraviesa sin desviarse.



El punto de corte es el correspondiente a la imagen **I**.

c) La potencia de la lente es la inversa de la distancia focal (expresada en metros) y puede calcularse de la ecuación de las lentes.

$$\frac{1}{2,45 \text{ [m]}} - \frac{1}{-0,245 \text{ [m]}} = \frac{1}{f} = P$$

$$P = 4,48 \text{ dioptrías}$$

5. Un objeto de 3 cm de altura se coloca a 20 cm de una lente delgada de 15 cm de focal. Calcula analíticamente y gráficamente la posición y tamaño de la imagen:

- Si la lente es convergente.
- Si la lente es divergente.

(P.A.U. Set. 06)

Rta.: a) $s' = 0,60 \text{ m}$; $y' = -9,0 \text{ cm}$; b) $s' = -0,086 \text{ m}$; $y' = 1,3 \text{ cm}$

Datos (convenio de signos DIN)

Tamaño del objeto

Posición del objeto

Distancia focal de la lente

Incógnitas

Posición de la imagen en ambas lentes

Tamaño de la imagen en ambas lentes

Ecuaciones

Relación entre la posición de la imagen y la del objeto en las lentes

Aumento lateral en las lentes

Cifras significativas: 2

$y = 3,0 \text{ cm} = 0,030 \text{ m}$

$s = -20 \text{ cm} = -0,20 \text{ m}$

$f = 15 \text{ cm} = 0,15 \text{ m}$

s_1', s_2'
 y_1', y_2'

$$\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = \frac{1}{f}$$

$$A_L = \frac{y'}{y} = \frac{s'}{s}$$

Solución:

a) Por el convenio de signos, los puntos situados a la izquierda de la lente tienen signo negativo. Para la lente convergente, $f = +0,15 \text{ m}$:

Se usa la ecuación de las lentes:

$$\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = \frac{1}{f}$$

Se sustituyen los datos:

$$\frac{1}{s'} - \frac{1}{-0,20 \text{ [m]}} = \frac{1}{0,15 \text{ [m]}}$$

Y se calcula la posición de la imagen:

$$s' = 0,60 \text{ m}$$

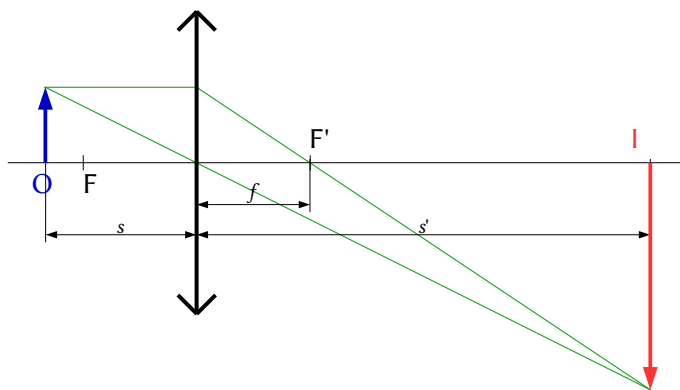
Para calcular la altura de la imagen se usa la ecuación del aumento lateral:

$$A_L = \frac{y'}{y} = \frac{s'}{s} = \frac{0,60 \text{ [m]}}{-0,20 \text{ [m]}} = -3,0$$

Y se calcula la altura de la imagen:

$$y' = A_L \cdot y = -3,0 \cdot 0,030 \text{ m} = -0,090 \text{ m} = -9,0 \text{ cm}$$

En el dibujo se representa el objeto **O** antes de la lente y desde su punto superior se dibujan dos rayos:



- Uno horizontal hacia la lente que la atraviesa y se refracta de manera que el rayo refractado pasa por el foco F' .
 - Otro hacia el centro de la lente que la atraviesa sin desviarse.
- El punto de corte es el correspondiente a la imagen I .

Análisis: La imagen es real ya que s' es positiva, es decir a la derecha de la lente que es la zona donde se forman las imágenes reales en las lentes. El signo negativo del tamaño nos indica que la imagen es invertida. Los resultados numéricos coinciden con el dibujo.

b) Para la lente divergente, $f = -0,15$ m. Se sustituyen los datos en la ecuación de las

$$\frac{1}{s'} - \frac{1}{-0,20 \text{ [m]}} = \frac{1}{-0,15 \text{ [m]}}$$

Y se calcula la posición de la imagen:

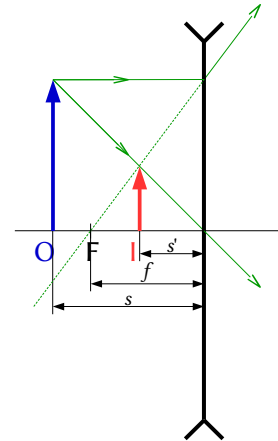
$$s' = -0,086 \text{ m}$$

Para calcular la altura de la imagen se usa la ecuación del aumento lateral:

$$A_L = \frac{y'}{y} = \frac{s'}{s} = \frac{-0,086 \text{ [m]}}{-0,20 \text{ [m]}} = 0,43$$

Y se calcula la altura de la imagen:

$$y' = A_L \cdot y = 0,43 \cdot 0,030 \text{ m} = 0,013 \text{ m} = 1,3 \text{ cm}$$



- a) En el dibujo se representa el objeto O antes de la lente y desde su punto superior se dibujan dos rayos:
- Uno horizontal hacia la lente que la atraviesa y se refracta de manera que la prolongación del rayo refractado pasa por el foco F .
 - Otro hacia el centro de la lente que la atraviesa sin desviarse.
- Como los rayos no se cortan, se prolongan hasta que sus prolongaciones se cortan. El punto de corte es el correspondiente a la imagen I .

Análisis: La imagen es virtual ya que s' es negativa, es decir a la izquierda de lente que es la zona donde se forman las imágenes virtuales en las lentes. El signo positivo del tamaño nos indica que la imagen es derecha. Los resultados numéricos coinciden con el dibujo.

6. Un objeto de 3 cm se sitúa a 20 cm de una lente cuya distancia focal es 10 cm:
- Dibuja la marcha de los rayos si la lente es convergente.
 - Dibuja la marcha de los rayos si la lente es divergente.
 - En ambos casos calcula la posición y el tamaño de la imagen.

(P.A.U. Jun. 12)

Rta.: c) $s' = 0,20$ m; $y' = -3,0$ cm; d) $s' = -0,067$ m; $y' = 1,0$ cm

Datos (convenio de signos DIN)

- Tamaño del objeto
- Posición del objeto
- Distancia focal de la lente

Incógnitas

- Posición de la imagen en ambas lentes
- Tamaño de la imagen en ambas lentes

Ecuaciones

Relación entre la posición de la imagen y la del objeto en las lentes

Aumento lateral en las lentes

Cifras significativas: 2

- $y = 3,0 \text{ cm} = 0,030 \text{ m}$
- $s = -20 \text{ cm} = -0,20 \text{ m}$
- $f = 10 \text{ cm} = 0,10 \text{ m}$

- s_1', s_2'
- y_1', y_2'

$$\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = \frac{1}{f}$$

$$A_L = \frac{y'}{y} = \frac{s'}{s}$$

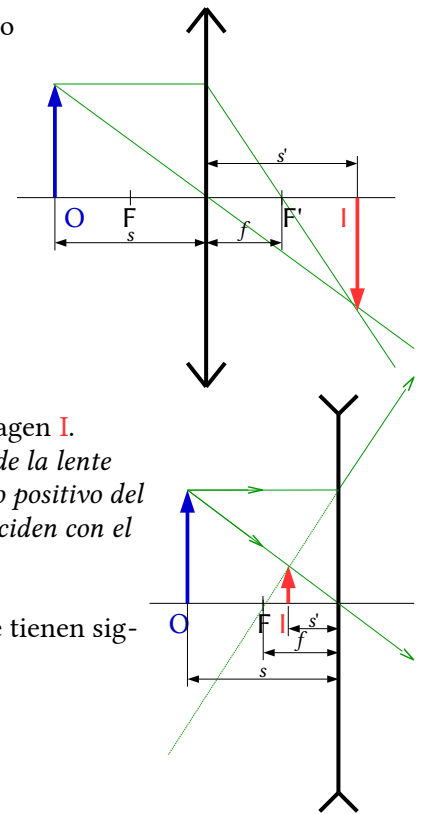
Solución:

a) En el dibujo se representa el objeto **O** antes de la lente y desde su punto superior se dibujan dos rayos:

- Uno horizontal hacia la lente que la atraviesa y se refracta de manera que el rayo refractado pasa por el foco F' .
- Otro hacia el centro de la lente que la atraviesa sin desviarse.

El punto de corte es el correspondiente a la imagen **I**.

Análisis: La imagen es real ya que s' es positiva, es decir a la derecha de la lente que es la zona donde se forman las imágenes reales en las lentes. El signo negativo del tamaño nos indica que la imagen es invertida. Los resultados numéricos coinciden con el dibujo.



b) En el dibujo, como los rayos no se cortan, se prolongan hasta que sus prolongaciones se cortan. El punto de corte es el correspondiente a la imagen **I**.

Análisis: La imagen es virtual ya que s' es negativa, es decir a la izquierda de la lente que es la zona donde se forman las imágenes virtuales en las lentes. El signo positivo del tamaño nos indica que la imagen es derecha. Los resultados numéricos coinciden con el dibujo.

c) Por el convenio de signos, los puntos situados a la izquierda de la lente tienen signo negativo. Para la lente convergente, $f = +0,10$ m.

Se usa la ecuación de las lentes:

$$\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = \frac{1}{f}$$

Se sustituyen los datos:

$$\frac{1}{s'} - \frac{1}{-0,20 \text{ [m]}} = \frac{1}{0,10 \text{ [m]}}$$

Y se calcula la posición de la imagen:

$$s' = 0,20 \text{ m}$$

Para calcular la altura de la imagen se usa la ecuación del aumento lateral:

$$A_L = \frac{y'}{y} = \frac{s'}{s} = \frac{y'}{0,030 \text{ [m]}} = \frac{0,20 \text{ [m]}}{-0,20 \text{ [m]}} = -1$$

Y se calcula la altura de la imagen:

$$y' = A_L \cdot y = -1,0 \cdot 0,030 \text{ m} = -0,030 \text{ m} = -3,0 \text{ cm}$$

Para la lente divergente, $f = -0,10$ m.

$$\frac{1}{s'} - \frac{1}{-0,20 \text{ [m]}} = \frac{1}{-0,10 \text{ [m]}}$$

$$s' = -0,067 \text{ m}$$

$$\frac{y'}{0,030 \text{ [m]}} = \frac{-0,067 \text{ [m]}}{-0,20 \text{ [m]}}$$

$$y' = 0,010 \text{ m} = 1,0 \text{ cm}$$

7. Se quiere formar una imagen real y de doble tamaño de un objeto de 1,5 cm de altura. Determina:

- a) La posición del objeto si se usa un espejo cóncavo de $R = 15$ cm.
- b) La posición del objeto si se usa una lente convergente con la misma distancia focal que el espejo.
- c) Dibuja la marcha de los rayos para los dos apartados anteriores.

(P.A.U. Jun. 11)

Rta.: a) $s_e = -11$ cm; b) $s_l = -11$ cm

Datos (convenio de signos DIN)

Tamaño del objeto
Aumento lateral
Radio del espejo cóncavo

Incógnitas

Posición del objeto ante el espejo
Posición del objeto ante la lente

Otros símbolos

Distancia focal del espejo y de la lente
Tamaño de la imagen

Ecuaciones

Relación entre la posición de la imagen y la del objeto en los espejos

Aumento lateral en los espejos

Relación entre la distancia focal y el radio de curvatura

Relación entre la posición de la imagen y la del objeto en las lentes

Aumento lateral en las lentes

Cifras significativas: 2

$$y = 1,5 \text{ cm} = 0,015 \text{ m}$$

$$A_L = -2,0$$

$$R = -15 \text{ cm} = -0,15 \text{ m}$$

 s_e
 s_l
 f
 y'

$$\frac{1}{s'} + \frac{1}{s} = \frac{1}{f}$$

$$A_L = \frac{y'}{y} = -\frac{s'}{s}$$

$$f = R / 2$$

$$\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = \frac{1}{f}$$

$$A_L = \frac{y'}{y} = \frac{s'}{s}$$

Solución:

a) Si la imagen es real y de tamaño doble, tiene que ser invertida, por lo que el aumento lateral será negativo.

$$A_L = -2,0$$

Aplicando la ecuación del aumento lateral se encuentra la relación entre las distancias del objeto e imagen:

$$A_L = -s' / s \Rightarrow s' = 2,0 s$$

La distancia focal vale:

$$f_e = R / 2 = -0,075 \text{ m}$$

Se aplica la ecuación de los espejos:

$$\frac{1}{s'} + \frac{1}{s} = \frac{1}{f}$$

Se sustituyen los datos:

$$\frac{1}{2,0 s} + \frac{1}{s} = \frac{1}{-0,075 \text{ [m]}}$$

Y se calcula la distancia del objeto:

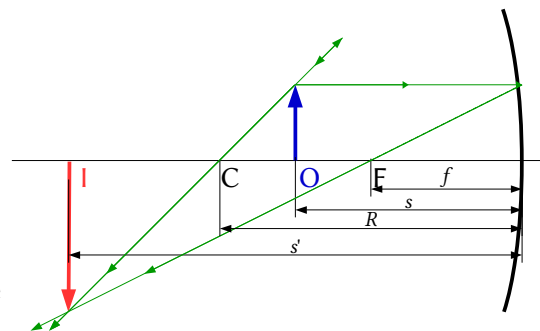
$$s_e = 3 \cdot \frac{(-0,075 \text{ [m]})}{2} = -0,11 \text{ m}$$

En el dibujo se representa el objeto **O** antes del espejo y desde su punto superior se dibujan dos rayos:

- Uno horizontal hacia el espejo que se refleja de manera que el rayo reflejado pasa por el foco **F** (que se encuentra a la mitad de la distancia entre el espejo y su centro **C**).
- Otro hacia el espejo que se refleja sin desviarse pasando por el centro **C** de curvatura del espejo.

Como los rayos no se cortan, se prolongan al otro lado del espejo hasta que sus prolongaciones se cortan. El punto de corte es el correspondiente a la imagen **I**.

Análisis: En un espejo, la imagen es real si se forma a la izquierda del espejo, ya que los rayos que salen reflejados solo se cortan a la izquierda.



b) Si la lente es convergente, la distancia focal es positiva.

$$f_l = 0,075 \text{ m}$$

Como la imagen es real el aumento lateral es negativo.

$$A_l = -2,0 = s' / s$$

$$s' = -2,0 s$$

Se aplica la ecuación de los espejos:

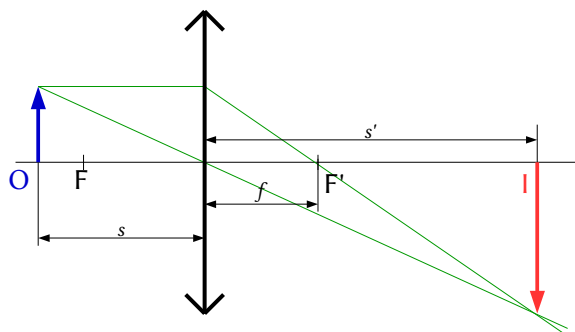
$$\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = \frac{1}{f}$$

Se sustituyen los datos:

$$\frac{1}{-2,0s} - \frac{1}{s} = \frac{1}{0,075 \text{ [m]}}$$

Y se calcula la distancia del objeto:

$$s_1 = \frac{-3 \cdot 0,075 \text{ [m]}}{2} = -0,11 \text{ m}$$



◇ CUESTIONES

● DIOPTRIO PLANO.

1. Cuando un rayo de luz monocromática pasa desde el aire al agua se produce un cambio:

- A) En la frecuencia.
- B) En la longitud de onda.
- C) En la energía.

Dato: $n(\text{agua}) = 4/3$

(P.A.U. Set. 10)

Solución: B?

El índice de refracción n_i de un medio es el cociente entre la velocidad de la luz c en el vacío y la velocidad de la luz v_i en ese medio

$$n_i = \frac{c}{v_i}$$

Del valor $n(\text{agua}) = 4/3$, se deduce que la velocidad de la luz en el agua es

$$v(\text{agua}) = \frac{c}{4/3} = \frac{3}{4} c < c$$

La frecuencia de una onda armónica es característica e independiente del medio por el que se propaga. Es el número de oscilaciones (en el caso de la luz como onda electromagnética) del campo eléctrico o magnético en la unidad de tiempo y corresponde al número de ondas que pasan por un punto en la unidad de tiempo.

Al pasar de un medio (aire) a otro (agua) en el que la velocidad de propagación es menor, la frecuencia f se mantiene pero la longitud de onda, λ disminuye proporcionalmente, por la relación entre la velocidad de propagación v y la longitud de onda λ ,

$$v = \lambda \cdot f$$

La energía de una luz monocromática es proporcional a la frecuencia (h es la constante de Planck), según la ecuación de Planck,

$$E_f = h \cdot f$$

No variaría al cambiar de medio si éste no absorbiera la luz. El agua va absorbiendo la energía de la luz, por lo que se produciría una pérdida de la energía, que a lo largo de una cierta distancia haría que la luz dejara de propagarse por el agua.

2. Cuando la luz incide en la superficie de separación de dos medios con un ángulo igual al ángulo límite eso significa que:
- El ángulo de incidencia y el de refracción son complementarios.
 - No se observa rayo refractado.
 - El ángulo de incidencia es mayor que el de refracción.

(P.A.U. Set. 05)

Solución: B

Cuando un rayo pasa del medio más denso al menos denso e incide en la superficie de separación con un ángulo superior al ángulo límite, el rayo no sale refractado sino que sufre reflexión total. Si el ángulo de incidencia es igual al ángulo límite, el rayo refractado sale con un ángulo de 90° y no se observa.

3. Un rayo de luz incide desde el aire ($n = 1$) sobre una lámina de vidrio de índice de refracción $n = 1,5$. El ángulo límite para la reflexión total de este rayo es:
- $41,8^\circ$
 - 90°
 - No existe.

(P.A.U. Set. 08)

Solución: C

Para que exista ángulo límite, la luz debe pasar de un medio más denso ópticamente (con mayor índice de refracción) a uno menos denso.

Por la ley de Snell

$$n_1 \cdot \text{sen } \theta_1 = n_2 \cdot \text{sen } \theta_2$$

El ángulo límite es el ángulo de incidencia para el que el ángulo de refracción vale 90° .

$$n_1 \cdot \text{sen } \lambda_1 = n_2 \cdot \text{sen } 90^\circ = n_2$$

Si $n_2 > n_1$ entonces:

$$\text{sen } \lambda_1 = n_2 / n_1 > 1$$

Es imposible. El seno de un ángulo no puede ser mayor que uno.

4. El ángulo límite en la refracción agua/aire es de $48,61^\circ$. Si se posee otro medio en el que la velocidad de la luz sea $v(\text{medio}) = 0,878 v(\text{agua})$, el nuevo ángulo límite (medio/aire) será:
- Mayor.
 - Menor.
 - No se modifica.

(P.A.U. Jun. 04)

Solución: B

El ángulo límite es el ángulo de incidencia para el que el ángulo de refracción vale 90°
Aplicando la 2ª ley de Snell de la refracción:

$$\frac{\text{sen } i}{\text{sen } r} = \frac{v_i}{v_r}$$

Para el ángulo límite $\lambda(\text{agua})$:

$$\frac{\text{sen } \lambda(\text{agua})}{\text{sen } 90^\circ} = \frac{v(\text{agua})}{v(\text{aire})}$$

$$\text{sen } \lambda(\text{agua}) = \frac{v(\text{agua})}{v(\text{aire})}$$

Con los datos:

$$v(\text{agua}) = v(\text{aire}) \cdot \text{sen } \lambda(\text{agua}) = 0,75 v(\text{aire})$$

Para un nuevo medio en el que $v(\text{medio}) = 0,878 v(\text{agua})$,

$$v(\text{medio}) < v(\text{agua})$$

$$\text{sen } \lambda(\text{medio}) = \frac{v(\text{medio})}{v(\text{aire})} < \text{sen } \lambda(\text{agua}) = \frac{v(\text{agua})}{v(\text{aire})}$$

$$\lambda(\text{medio}) < \lambda(\text{agua})$$

Con los datos:

$$\text{sen } \lambda(\text{medio}) = \frac{v(\text{medio})}{v(\text{aire})} = \frac{0,878 \cdot v(\text{agua})}{v(\text{aire})} = \frac{0,878 \cdot 0,75 \cdot v(\text{aire})}{v(\text{aire})} = 0,66$$

$$\lambda(\text{medio}) = 41^\circ < 48,61^\circ$$

5. Un rayo de luz láser se propaga en un medio acuoso (índice de refracción $n = 1,33$) e incide en la superficie de separación con el aire ($n = 1$). El ángulo límite es:
- A) $36,9^\circ$
 B) $41,2^\circ$
 C) $48,8^\circ$

(P.A.U. Jun. 15)

Solución: C

La ley de Snell de la refracción puede expresarse

$$n_i \text{ sen } \theta_i = n_r \text{ sen } \theta_r$$

n_i y n_r representan los índices de refracción de los medios incidente y refractado.

θ_i y θ_r son los ángulos de incidencia y refracción que forma cada rayo con la normal a la superficie de separación entre los dos medios.

Ángulo límite λ es el ángulo de incidencia tal que el de refracción vale 90° . Aplicando la ley de Snell

$$1,33 \text{ sen } \lambda = 1,00 \text{ sen } 90,0^\circ$$

$$\text{sen } \lambda = 1,00 / 1,33 = 0,75$$

$$\lambda = \text{arcsen } 0,75 = 48,6^\circ$$

6. Si el índice de refracción del diamante es 2,52 y el del vidrio 1,27.
- A) La luz se propaga con mayor velocidad en el diamante.
 B) El ángulo límite entre el diamante y el aire es menor que entre el vidrio y el aire.
 C) Cuando la luz pasa de diamante al vidrio el ángulo de incidencia es mayor que el ángulo de refracción.

(P.A.U. Jun. 05)

Solución: B

El ángulo límite λ es el ángulo de incidencia para el que el ángulo de refracción vale 90° .

Aplicando la 2ª ley de Snell de la refracción:

$$n_i \cdot \text{sen } \theta_i = n_r \cdot \text{sen } \theta_r$$

El índice de refracción del aire n_a es el cociente entre la velocidad de la luz en el vacío c y la velocidad de la luz en el aire v_a . Como son prácticamente iguales

$$n_a = c / v_a = 1$$

El ángulo límite entre el diamante y el aire es λ_d :

$$n_d \cdot \text{sen } \lambda_d = n_a \cdot \text{sen } 90^\circ = 1$$

$$\lambda_d = \text{arcsen} (1 / n_d) = \text{arcsen} (1 / 2,52) = 23^\circ$$

Análogamente para el vidrio:

$$\lambda_v = \text{arcsen} (1 / 1,27) = 52^\circ$$

Las otras opciones:

A. Se pueden calcular las velocidades de la luz en el diamante y en el vidrio a partir de la definición de índice de refracción,

$$n = c / v$$

$$v_d = c / n_d = 3 \cdot 10^8 \text{ [m/s]} / 2,52 = 1,2 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

$$v_v = c / n_v = 3 \cdot 10^8 \text{ [m/s]} / 1,27 = 2,4 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

C. Cuando la luz pasa de un medio más denso ópticamente (diamante) a otro menos denso (vidrio) el rayo refractado se aleja de la normal (el ángulo de incidencia es menor que el ángulo de refracción)

7. Cuando un rayo de luz incide en un medio de menor índice de refracción, el rayo refractado:
- Varía su frecuencia.
 - Se acerca a la normal.
 - Puede no existir rayo refractado.

(P.A.U. Set. 07)

Solución: C

Cuando la luz pasa de un medio más denso ópticamente (con mayor índice de refracción) a otro menos denso (por ejemplo del agua al aire) el rayo refractado se aleja de la normal. Por la segunda ley de Snell de la refracción:

$$n_i \cdot \text{sen } \theta_i = n_r \cdot \text{sen } \theta_r$$

Si $n_i > n_r$, entonces $\text{sen } \theta_r > \text{sen } \theta_i$, y $\theta_r > \theta_i$

Pero existe un valor de θ_i , llamado ángulo límite λ , para el que el rayo refractado forma un ángulo de 90° con la normal. Para un rayo incidente con un ángulo mayor que el ángulo límite, no aparece rayo refractado. Se produce una reflexión total.

8. En el fondo de una piscina hay un foco de luz. Observando la superficie del agua se vería luz:
- En toda la piscina.
 - Solo en el punto encima del foco.
 - En un círculo de radio R alrededor del punto encima del foco.

(P.A.U. Set. 10)

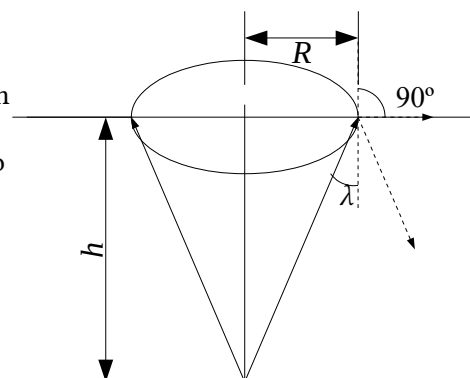
Solución: C

La superficie circular iluminada se debe a que los rayos que vienen desde el agua e inciden en la superficie de separación con un ángulo superior al ángulo límite no salen al exterior, porque sufren reflexión total.

El ángulo límite es el ángulo de incidencia para que produce un rayo refractado que sale con un ángulo de refracción de 90° .

Por la 2ª ley de Snell

$$n(\text{agua}) \cdot \text{sen } \theta_i = n(\text{aire}) \cdot \text{sen } \theta_r$$



$$n(\text{agua}) \cdot \text{sen } \lambda = 1 \cdot \text{sen } 90^\circ$$

$$\lambda = \arcsen(1/n(\text{agua}))$$

Del triángulo rectángulo del dibujo se deduce que:

$$R = h \cdot \tan \lambda$$

● ESPEJOS.

- La imagen formada en los espejos es:
 - Real si el espejo es convexo.
 - Virtual si el espejo es cóncavo y la distancia objeto es menor que la focal.
 - Real si el espejo es plano.

(P.A.U. Set. 06)

Solución: B

Tal como se ve en la figura.

Las ecuaciones de los espejos son:

$$\frac{1}{s'} + \frac{1}{s} = \frac{1}{f}$$

Despejando s'

$$\frac{1}{s'} = \frac{1}{f} - \frac{1}{s} = \frac{s-f}{s \cdot f}$$

$$s' = \frac{f \cdot s}{s-f}$$

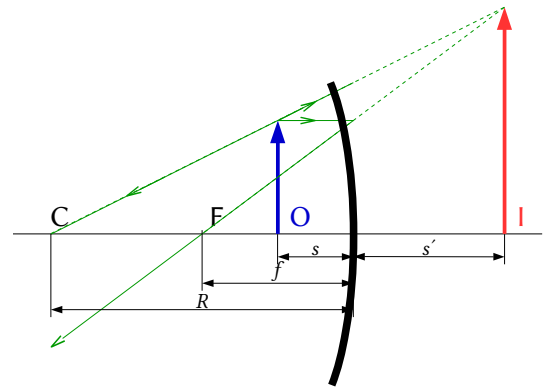
Como las coordenadas s y f son negativas, si $|s| < |f|$

$$s > f$$

Por tanto

$$s' = (-)(-) / (+) > 0$$

La imagen es virtual (se forma detrás del espejo)



- Si con un espejo se quiere obtener una imagen mayor que el objeto, habrá que emplear un espejo:
 - Plano.
 - Cóncavo.
 - Convexo.

(P.A.U. Set. 08)

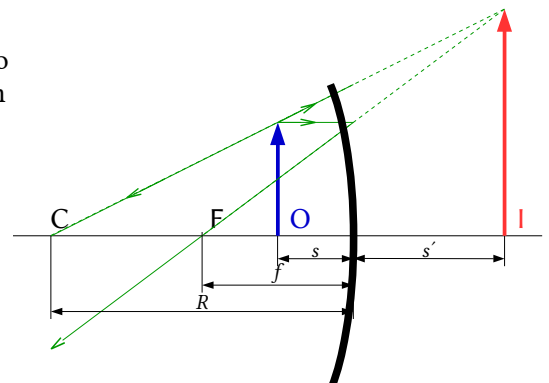
Solución: B

En los espejos planos el tamaño de la imagen es igual y en los convexos es siempre menor. Habrá que usar un espejo cóncavo y situar el objeto dentro de la distancia focal, tal como se ve en la figura.

Las ecuaciones de los espejos son:

$$\frac{1}{s'} + \frac{1}{s} = \frac{1}{f}$$

$$A_L = \frac{y'}{y} = \frac{-s'}{s}$$



Para que la imagen sea mayor, el aumento lateral ha de ser, en valor absoluto, mayor que la unidad, y por tanto:

$$|s'| > |s|$$

Despejando f

$$f = \frac{1}{\frac{1}{s'} + \frac{1}{s}}$$

Si $|s'| > |s|$

$$\frac{1}{|s'|} < \frac{1}{|s|}$$

La coordenada s es negativa y si la s' es positiva, (lo que ocurre cuando la imagen es virtual y se forma a la derecha del espejo)

$$\frac{1}{s'} + \frac{1}{s} < 0$$

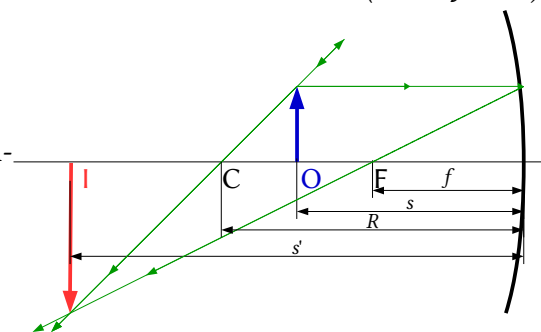
Por tanto $f < 0$, lo que indica que el espejo debe ser cóncavo.

3. Si un espejo forma una imagen real invertida y de mayor tamaño que el objeto, se trata de un espejo:
- Cóncavo y el objeto está situado entre el foco y el centro de la curvatura.
 - Cóncavo y el objeto está situado entre el foco y el espejo.
 - Convexo con el objeto en cualquier posición.

(P.A.U. Jun. 12)

Solución: A

En los espejos convexos el tamaño de la imagen es siempre menor. Habrá que usar un espejo cóncavo y situar el objeto entre el centro de curvatura y el foco tal como se ve en la figura.

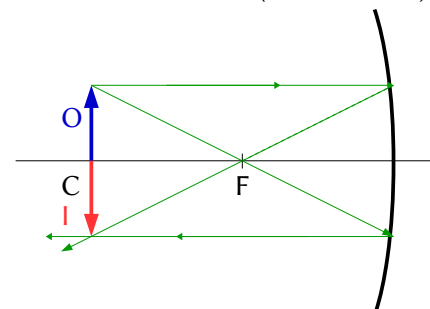


4. Para obtener una imagen en la misma posición en que está colocado el objeto, ¿qué tipo de espejo y en qué lugar ha de colocarse el objeto?:
- Cóncavo y objeto situado en el centro de curvatura.
 - Convexo y objeto situado en el centro de curvatura.
 - Cóncavo y objeto situado en el foco.

(P.A.U. Set. 11)

Solución: A

El resultado se ve en la figura, en la que O es el objeto, I la imagen, C el centro de curvatura y F el foco del espejo cóncavo.



5. Si se desea obtener una imagen virtual, derecha y menor que el objeto, se usa:
- Un espejo convexo.
 - Una lente convergente.
 - Un espejo cóncavo.

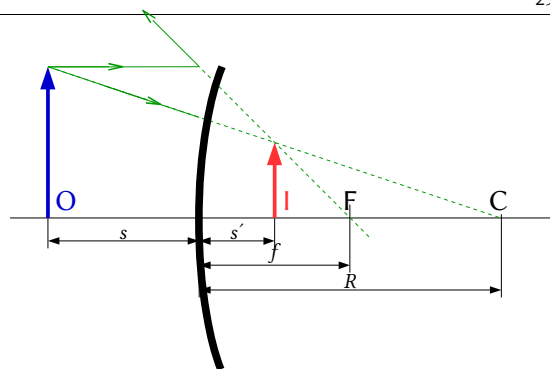
(P.A.U. Jun. 13)

Solución: A

Véase la marcha de los rayos.

La imagen se forma detrás del espejo, por lo que es virtual.

El tipo de imagen es independiente de la distancia del objeto al espejo.



6. Un espejo cóncavo tiene 80 cm de radio de curvatura. La distancia del objeto al espejo para que su imagen sea derecha y 4 veces mayor es:

- A) 50 cm.
B) 30 cm.
C) 60 cm.

(P.A.U. Set. 13)

Datos (convenio de signos DIN)

Radio de curvatura

Aumento lateral

Incógnitas

Posición del objeto

Otros símbolos

Distancia focal del espejo

Posición de la imagen

Tamaño del objeto

Tamaño de la imagen

Ecuaciones

Relación entre la posición de la imagen y la del objeto en los espejos

Aumento lateral en los espejos

Cifras significativas: 3

$$R = -80,0 \text{ cm} = -0,800 \text{ m}$$

$$A_L = 4,00$$

s

f

s'

y

y'

$$\frac{1}{s'} + \frac{1}{s} = \frac{1}{f}$$

$$A_L = \frac{y'}{y} = -\frac{s'}{s}$$

Solución: B

La distancia focal del espejo es la mitad del radio de curvatura. Como el espejo es cóncavo el foco se encuentra a la izquierda, y, por el convenio de signos, la distancia focal es negativa

$$f = R / 2 = -0,400 \text{ m}$$

El aumento lateral en espejos es

$$A_L = -\frac{s'}{s} = 4,00$$

$$s' = -4,00 s$$

Se sustituyen f , s' en la ecuación de los espejos

$$\frac{1}{-4,00 s} + \frac{1}{s} = \frac{1}{-0,400 \text{ [m]}}$$

Multiplicando ambos lados por $(-4,00 s)$ queda una ecuación sencilla

$$1 - 4,00 = 10 s$$

La solución es:

$$s = -0,300 \text{ m}$$

7. Queremos ver una imagen de nuestra cara para afeitarnos o maquillarnos. La imagen debe ser virtual, derecha y ampliada 1,5 veces. Si colocamos la cara a 25 cm del espejo. ¿Qué tipo de espejo debemos emplear?:
- A) Convexo.
B) Cóncavo.
C) Plano.

(P.A.U. Jun. 16)

Datos (convenio de signos DIN)

Posición del objeto

Aumento lateral

Incógnitas

Distancia focal del espejo

Otros símbolos

Posición de la imagen

Tamaño del objeto

Tamaño de la imagen

Ecuaciones

Relación entre la posición de la imagen y la del objeto en los espejos

Aumento lateral en los espejos

Cifras significativas: 2

$$s = -25 \text{ cm} = -0,25 \text{ m}$$

$$A_L = 1,5$$

$$f$$

$$s'$$

$$y$$

$$y'$$

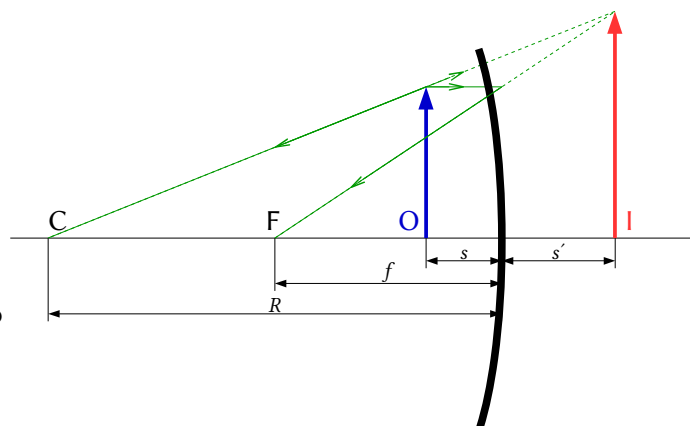
$$\frac{1}{s'} + \frac{1}{s} = \frac{1}{f}$$

$$A_L = \frac{y'}{y} = \frac{-s'}{s}$$

Solución: B

En el dibujo se representa el objeto O antes del espejo y desde su punto superior se dibujan dos rayos:

- Uno horizontal hacia el espejo que se refleja de manera que el rayo reflejado pasa por el foco F (que se encuentra a la mitad de la distancia entre el espejo y su centro C).
- Otro hacia el espejo que se refleja sin desviarse pasando por el centro C de curvatura del espejo. Como los rayos no se cortan, se prolongan al otro lado del espejo hasta que sus prolongaciones se cortan. El punto de corte es el correspondiente a la imagen I .



- a) Para calcular la posición de la imagen se usa la expresión del aumento lateral

$$A_L = 1,5 = -s' / s$$

$$s' = -1,5 s = -1,5 \cdot (-25 \text{ cm}) = +37,5 \text{ cm} = +0,375 \text{ m}$$

La imagen se encuentra a 37,5 cm a la derecha del espejo.

Análisis: En un espejo, la imagen es virtual si se forma a la derecha del espejo, ya que los rayos que salen reflejados solo se cortan a la izquierda.

- b) Se usa la ecuación de los espejos:

$$\frac{1}{s'} + \frac{1}{s} = \frac{1}{f}$$

Se sustituyen los datos:

$$\frac{1}{0,375 \text{ [m]}} + \frac{1}{-0,25 \text{ [m]}} = \frac{1}{f}$$

Y se calcula la distancia focal:

$$f = -0,75 \text{ m} = -75 \text{ cm}$$

Análisis: El signo negativo indica que el espejo es cóncavo, ya que su foco y su centro de curvatura se encuentran a la izquierda del espejo. El espejo tiene que ser cóncavo, ya que los espejos convexos dan una imagen virtual pero menor que el objeto. Los resultados de s' y f están de acuerdo con el dibujo.

8. Dos espejos planos están colocados perpendicularmente entre sí. Un rayo de luz que se desplace en un tercer plano perpendicular a los dos, se refleja sucesivamente en los dos espejos. El rayo reflejado en el segundo espejo, con respecto al rayo original:
- Es perpendicular.
 - Es paralelo.
 - Depende del ángulo de incidencia.

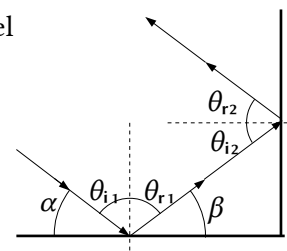
(P.A.U. Set. 04)

Solución: B

Véase la figura. Si se llama α al ángulo que forma el rayo con el espejo horizontal, el ángulo con que sale el rayo reflejado en el espejo vertical respecto a la horizontal, también vale α .

Se cumple que:

$$\begin{aligned}\beta &= \pi - \alpha \\ \theta_{i2} &= -\beta = -\alpha \\ \theta_{r2} &= -\theta_{i2} = \alpha\end{aligned}$$



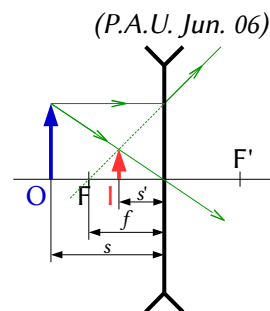
● LENTES.

1. En las lentes divergentes la imagen siempre es:
- Derecha, mayor y real.
 - Derecha, menor y virtual.
 - Derecha, menor y real.

Solución: B

Derecha, menor y virtual.

De acuerdo con la representación gráfica:



(P.A.U. Jun. 06)

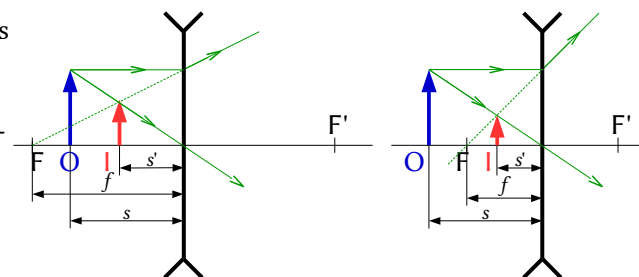
2. Si se desea formar una imagen virtual, derecha y de menor tamaño que el objeto, se debe utilizar:
- Un espejo cóncavo.
 - Una lente convergente.
 - Una lente divergente.

(P.A.U. Jun. 07)

Solución: C

Los dibujos muestran la formación de imágenes en los casos en que el objeto se encuentra después del foco objeto y antes del foco objeto.

En todos los casos la imagen es virtual, derecha y menor que el objeto.



3. Para obtener una imagen virtual, derecha y de mayor tamaño que el objeto se usa:
- Una lente divergente.
 - Una lente convergente.
 - Un espejo convexo.

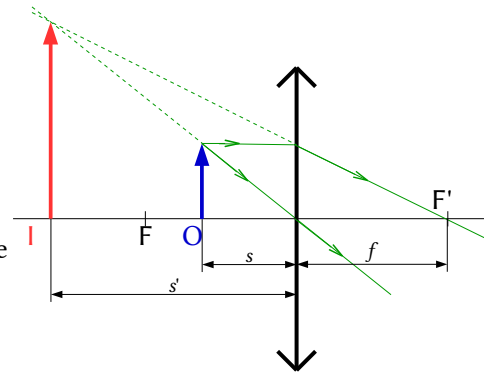
(P.A.U. Jun. 10, Jun. 09)

Solución: B

El diagrama muestra la formación de la imagen cuando el objeto se encuentra dentro de la distancia focal.

Las otras opciones:

A y B. Falsas. Las lentes divergentes y los espejos convexos siempre producen imágenes virtuales, derechas pero de menor tamaño que el objeto.



● ONDAS LUMINOSAS

1. Tres colores de la luz visible, el azul, el amarillo y el rojo, coinciden en que:
- Poseen la misma energía.
 - Poseen la misma longitud de onda.
 - Se propagan en el vacío con la misma velocidad.

(P.A.U. Jun. 04)

Solución: C

Los colores de la luz visible son ondas electromagnéticas que, por definición, se propagan en el vacío con la velocidad c de 300 000 km/s.

Las otras opciones:

A y B: Falsas. Se distinguen entre ellos en su frecuencia f y en su longitud de onda $\lambda = c / f$. La energía de una onda depende del cuadrado de la frecuencia y del cuadrado de la amplitud, por lo que la energía que transporta no tiene por que ser la misma.

2. La luz visible abarca un rango de frecuencias que van desde (aproximadamente) $4,3 \cdot 10^{14}$ Hz (rojo) hasta $7,5 \cdot 10^{14}$ Hz (ultravioleta). ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es correcta?
- La luz roja tiene menor longitud de onda que la ultravioleta.
 - La ultravioleta es la más energética del espectro visible.
 - Ambas aumentan la longitud de onda en un medio con mayor índice de refracción que aire.

(P.A.U. Jun. 10)

Solución: B

Hago la salvedad de que, estrictamente, la luz ultravioleta no es visible, pero limita con la violeta, que sí lo es, en esa frecuencia.

En la teoría clásica, la energía de una onda es directamente proporcional al cuadrado de la amplitud y de la frecuencia. Como la frecuencia de la luz ultravioleta es mayor que de la luz roja, tendrá mayor energía.

(En la teoría cuántica, la luz se puede considerar como un haz de partículas llamadas fotones. La energía E que lleva un fotón de frecuencia f es:

$$E = h \cdot f$$

Siendo h la constante de Planck, que tiene un valor muy pequeño: $h = 6,63 \cdot 10^{-34}$ J·s

En cuyo caso, cuanto mayor sea la frecuencia, mayor será la energía del fotón)

Las otras opciones:

A. Falsa. La longitud de onda λ está relacionada con la velocidad de propagación v y la frecuencia f por:

$$v = \lambda \cdot f$$

En un medio homogéneo, la longitud de onda y la frecuencia son inversamente proporcionales. Como

$$f_u = 7,5 \cdot 10^{14} > 4,3 \cdot 10^{14} = f_v \Rightarrow \lambda_u < \lambda_v$$

C. Falsa. El índice de refracción de un medio respecto al vacío n_m es el cociente entre la velocidad de la luz en el vacío c y la velocidad de la luz en medio v_m .

$$n_m = c / v_m$$

Si el índice de refracción del medio es mayor que el del aire, la velocidad de la luz en ese medio tiene que ser menor, por ser inversamente proporcionales.

$$n_m > n_a \Rightarrow v_m < v_a$$

Como la frecuencia de la luz es característica (no varía al cambiar de medio) y está relacionada con la velocidad de propagación de la luz en medio por:

$$v_m = \lambda_m \cdot f$$

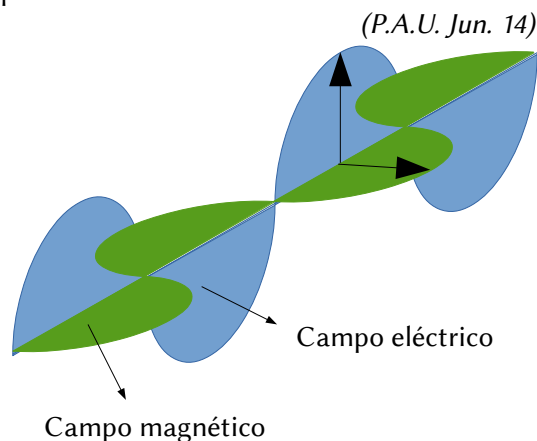
Como son directamente proporcionales, al ser menor a velocidad, también tiene que ser menor a longitud de onda.

3. En una onda de luz:

- A) Los campos eléctrico \vec{E} y magnético \vec{B} vibran en planos paralelos.
 - B) Los campos \vec{E} y \vec{B} vibran en planos perpendiculares entre sí.
 - C) La dirección de propagación es la de vibración del campo eléctrico.
- (Dibuja la onda de luz).

Solución: B

Una onda electromagnética es una combinación de un campo eléctrico y un campo magnético oscilante que se propagan en direcciones perpendiculares entre sí.

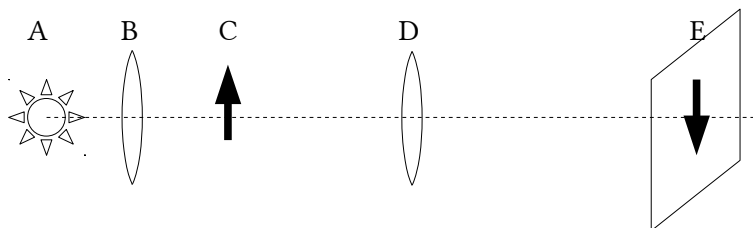


◇ LABORATORIO

1. Haz un esquema de la práctica de óptica, situando el objeto, la lente y la imagen, dibujando la marcha de los rayos.

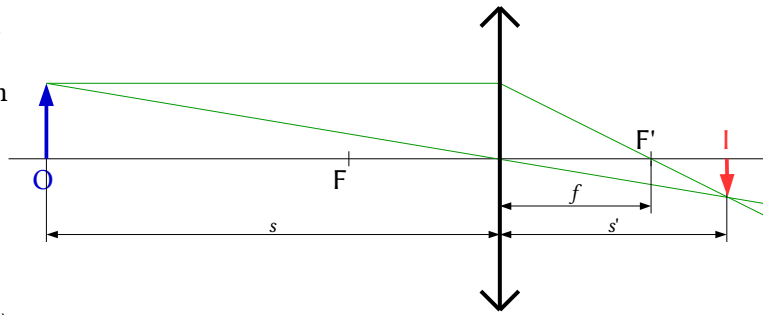
(P.A.U. Set. 15)

Solución:



A es la fuente luminosa, B una lente convergente que se sitúa de forma que la fuente luminosa esté en el foco, para que los rayos salgan paralelos. C es el objeto, D la lente convergente de la que queremos hallar la distancia focal y E la imagen del objeto.

Para obtener una imagen real, que se pueda recoger en una pantalla, el objeto debe situarse antes del foco. En este caso la imagen es siempre invertida.

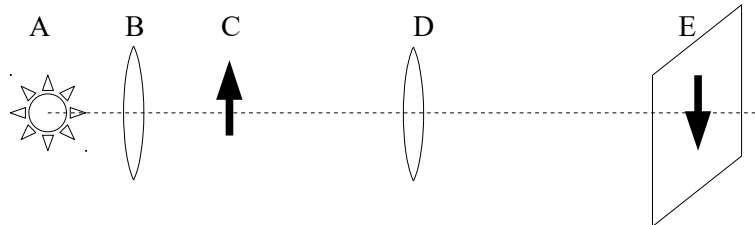


2. En la práctica de óptica, ¿se pudo determinar la distancia focal de la lente? ¿Cómo?

(P.A.U. Jun. 14, Set. 06)

Solución:

Sí. Se hizo el montaje de la figura y se fue variando la posición de la lente D y moviendo la pantalla E hasta obtener una imagen enfocada.



Se medían los valores de s (distancia del objeto a la lente $s = CD$) y s' (distancia de la imagen a la lente $s' = DE$)

Se aplicaba la ecuación de las lentes

$$\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = \frac{1}{f}$$

Se calculaba la distancia focal f para cada medida.

Luego se calculaba el valor medio de los valores calculados de la distancia focal.

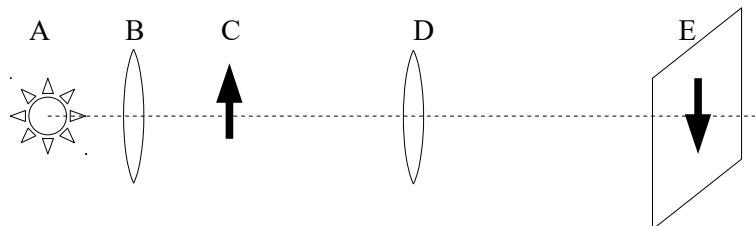
3. Se midieron en el laboratorio los siguientes valores para las distancia objeto-imagen de una lente convergente:
 a) Calcula el valor de la potencia de la lente.
 b) Explica el montaje experimental utilizado.

$s(\text{cm})$	39,0	41,9	49,3	59,9	68,5
$s'(\text{cm})$	64,3	58,6	48,8	40,6	37,8

(P.A.U. Set. 16)

Solución:

- b) El montaje es el de la figura.



A es la fuente luminosa, B una lente convergente que se sitúa de forma que la fuente luminosa esté en el foco, para que los rayos salgan paralelos. C es el objeto, D la lente convergente de la que queremos hallar la distancia focal y E la imagen del objeto.

Se va variando la posición de la lente D y moviendo la pantalla E hasta obtener una imagen enfocada.

- a) Se sustituyen los valores de s y s' en la ecuación de las lentes

$$\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = \frac{1}{f}$$

Se calcula el inverso de la distancia focal (potencia) y el valor de la distancia focal para cada par de datos.

s (cm)	s' (cm)	s (m)	s' (m)	1/s (m ⁻¹)	1/s' (m ⁻¹)	1/f (m ⁻¹)	f (m)
-39,0	64,3	-0,390	0,643	-2,56	1,56	4,12	0,243
-41,9	58,6	-0,419	0,586	-2,39	1,71	4,09	0,244
-49,3	48,8	-0,493	0,488	-2,03	2,05	4,08	0,245
-59,9	40,6	-0,599	0,406	-1,67	2,46	4,13	0,242
-68,5	37,8	-0,685	0,378	-1,46	2,65	4,11	0,244

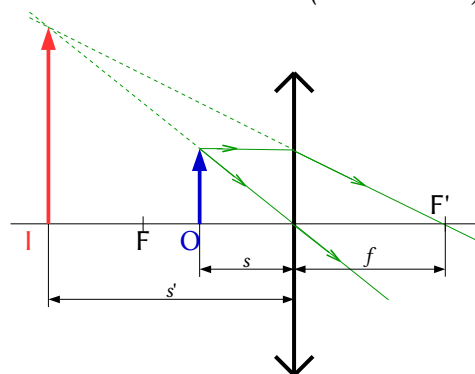
El valor medio de la potencia es: $P = 1 / f = 4,11 \text{ m}^{-1} = 4,11$ dioptrías.

4. En el laboratorio trabajas con lentes convergentes y recoges en una pantalla las imágenes de un objeto. Explica lo que sucede, ayudándote del diagrama de rayos, cuando sitúas el objeto a una distancia de la lente inferior a su distancia focal.

(P.A.U. Set. 14)

Solución:

Si colocamos el objeto a la distancia inferior a la distancia focal, la imagen se forma antes de la lente, es virtual y no se puede recoger en una pantalla.



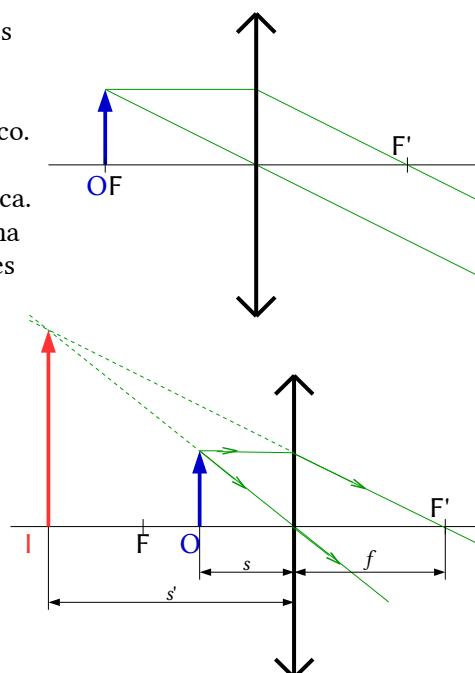
5. En la práctica de la lente convergente dibuja la marcha de los rayos y la imagen formada de un objeto cuando:
- Se sitúa en el foco.
 - Se sitúa entre el foco y el centro óptico.

(P.A.U. Jun. 10)

Solución:

- En este caso no se forma imagen, porque los rayos salen paralelos después de atravesar la lente.
- La imagen es virtual, derecha y mayor, y situada entre $-\infty$ y el foco.

Hay que hacer constar que nada de esto se puede hacer en la práctica. Cuando el objeto se pone en el foco, la imagen no se forma (se forma en el infinito), y cuando se pone entre el foco y la lente, la imagen es virtual, y no se puede recoger en una pantalla para hacer medidas. Pero si lo hacemos en el laboratorio, en ambos casos una imagen parece que se forma en la pantalla solo que no es una imagen definida. Como no podemos obtener una imagen definida, podría ser que tomásemos las imágenes que se forman en la pantalla como imágenes reales.



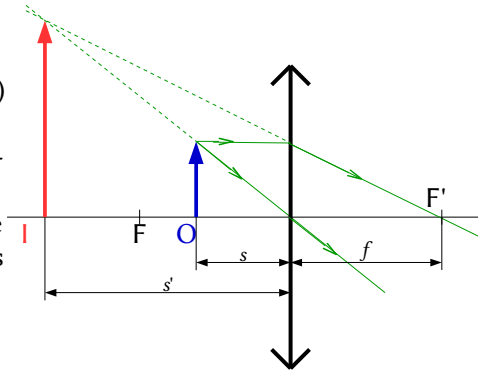
6. En la práctica de la lente convergente explica si hay alguna posición del objeto para la que la imagen sea virtual y derecha, y otra para la que la imagen sea real e invertida y del mismo tamaño que el objeto.

(P.A.U. Jun. 04)

Solución:

Las imágenes virtuales no se pueden recoger en una pantalla. En la práctica de laboratorio con lentes convergentes se sitúa un objeto (una placa con un símbolo 1 en la trayectoria de los rayos paralelos) a una cierta distancia de una lente convergente, y con una pantalla se busca la posición de la imagen nítida. No se puede, por tanto, obtener una imagen virtual.

Teóricamente la posición del objeto para que una lente convergente de una imagen virtual y derecha, puede calcularse de las ecuaciones de las lentes



$$A_L = \frac{y'}{y} = \frac{s'}{s}$$

$$\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = \frac{1}{f}$$

Si la imagen es derecha, $y' > 0$, y si es virtual, $s' < 0$.

$$\frac{1}{s} = \frac{1}{s'} - \frac{1}{f} = \frac{f - s'}{s' \cdot f}$$

$$s = \frac{s' \cdot f}{f - s'}$$

Como $f > 0$ y $s' < 0$

$$f' - s' > |s'|$$

$$|s| = f \frac{|s'|}{f - s'} < f$$

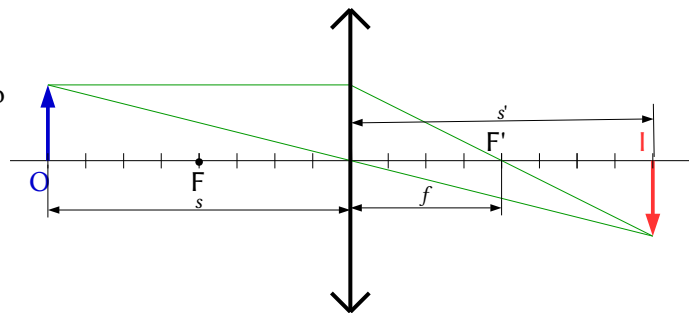
Para que la imagen sea virtual el objeto debe encontrarse dentro de la distancia focal.

En cuanto a la imagen real, las ecuaciones de las lentes nos dan que la posición del objeto para que la imagen sea real e invertida y del mismo tamaño ($y' = -y$) es:

$$s' = -s$$

$$2 / s = 1 / f$$

$$s = 2f$$



El esquema de la marcha de los rayos es el de la figura.

7. Se dispone de un proyector con una lente delgada convergente, y se desea proyectar una transparencia de forma que la imagen sea real e invertida y mayor que el objeto. Explica cómo hacerlo. (Haz un dibujo mostrando la trayectoria de los rayos)

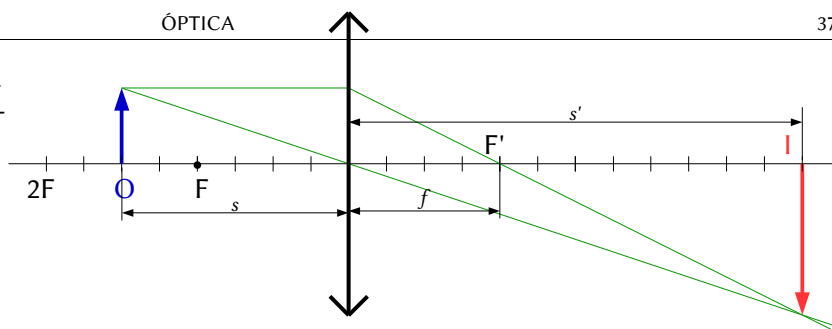
(P.A.U. Jun. 05)

Solución:

Si la diapositiva (objeto) se encuentra a una distancia s de la lente comprendida entre

$$|f| < |s| < |2f|$$

La imagen que se forma es real, invertida y mayor, tal como se ve en la figura.



8. En la práctica de la lente convergente, haz un esquema del montaje experimental seguido en el laboratorio, explicando brevemente la misión de cada uno dos elementos empleados.

(P.A.U. Set. 05)

Solución: Véase el ejercicio de [setiembre de 2006](#)

9. Con un banco óptico de longitud l , se observa que la imagen producida por una lente convergente es siempre virtual. ¿Cómo se puede interpretar esto?

(P.A.U. Set. 10, Jun. 07)

Solución:

La distancia focal de la lente es mayor que la mitad de la longitud del banco óptico.

$$f > l/2$$

Las imágenes virtuales no se pueden recoger en una pantalla. En la práctica de laboratorio con lentes convergentes se sitúa un objeto (una placa con un símbolo 1 en la trayectoria de los rayos paralelos) a una cierta distancia de una lente convergente, y con una pantalla se busca la posición de la imagen nítida. No se puede, por tanto, obtener una imagen virtual.

Teóricamente la posición del objeto para que una lente convergente de una imagen virtual y derecha, puede calcularse de las ecuaciones de las lentes

$$A_L = \frac{y'}{y} = \frac{s'}{s}$$

$$\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = \frac{1}{f}$$

Si la imagen es derecha, $y' > 0$, y si es virtual, $s' < 0$.

$$\frac{1}{s} = \frac{1}{s'} - \frac{1}{f} = \frac{f - s'}{s' \cdot f}$$

$$s = \frac{s' \cdot f}{f - s'}$$

Como $f > 0$ y $s' < 0$

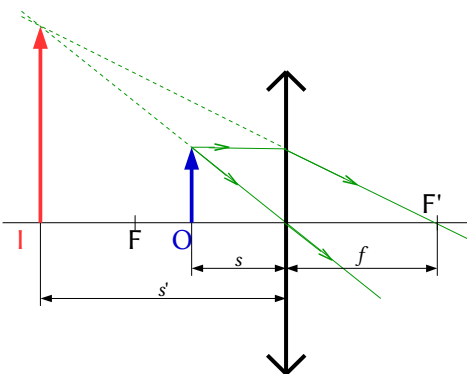
$$f - s' > |s'|$$

$$|s| = f \frac{|s'|}{f - s'} < f$$

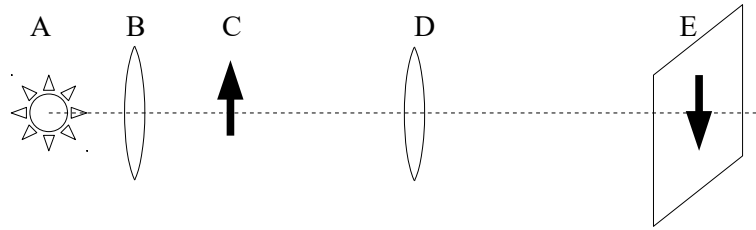
Para que la imagen sea virtual el objeto debe encontrarse dentro de la distancia focal.

10. Haz un esquema de la práctica de óptica, situando el objeto, la lente y la imagen, y dibujando la marcha de los rayos para obtener una imagen derecha y de mayor tamaño que el objeto.

(P.A.U. Set. 07)



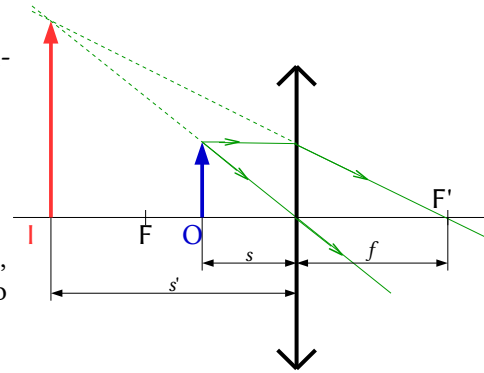
Solución:



A es la fuente luminosa, B una lente convergente que se sitúa de forma que la fuente luminosa esté en el foco, para que los rayos salgan paralelos. C es el objeto, D la lente convergente de la que queremos hallar la distancia focal y E la imagen del objeto.

Para obtener una imagen real, que se pueda recoger en una pantalla, el objeto debe situarse antes del foco. En este caso la imagen es siempre invertida.

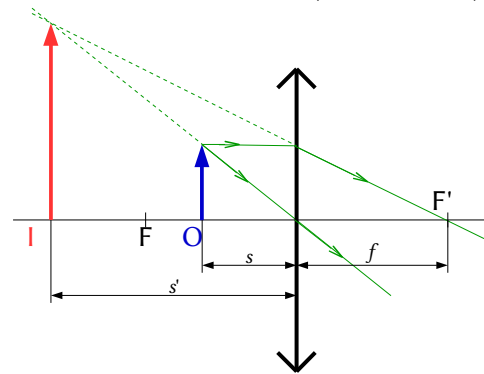
Para obtener una imagen derecha y de mayor tamaño que el objeto, hay que situar el objeto dentro de la distancia focal de la lente, pero la imagen será virtual y no podrá recogerse en una pantalla.



11. Dibuja la marcha de los rayos en una lente convergente, cuando la imagen producida es virtual.

(P.A.U. Set. 08)

Solución:



12. Si en la práctica de óptica geométrica la lente convergente tiene una distancia focal imagen de +10 cm, ¿a qué distancias de la lente puedes situar el objeto para obtener imágenes sobre la pantalla, si se cumple que $|s| + |s'| = 80$ cm? Dibuja la marcha de los rayos.

Rta.: $s_1 = -0,117$ m, $s_2 = -0,683$ m

(P.A.U. Set. 13)

Datos (convenio de signos DIN)

Distancia focal de la lente

Distancia entre el objeto y su imagen

Incógnitas

Posición del objeto

Otros símbolos

Tamaño del objeto

Posición de la imagen

Tamaño de la imagen

Ecuaciones

Relación entre la posición de la imagen y la del objeto en las lentes

Cifras significativas: 3

$$f' = 10,0 \text{ cm} = 0,100 \text{ m}$$

$$d = 80,0 \text{ cm} = 0,800 \text{ m}$$

s

y

s'

y'

$$\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = \frac{1}{f}$$

Solución:

Se usa la ecuación:

$$|s| + |s'| = 0,800 \text{ m}$$

Teniendo en cuenta que, por el criterio de signos, la distancia del objeto a la lente es negativa, $s < 0$, pero la distancia de la imagen, cuando es real, es positiva $s' > 0$, queda

$$-s + s' = 0,800 \text{ m}$$

Sustituyendo f y s' en la ecuación de las lentes, queda

$$\frac{1}{s+0,800 \text{ [m]}} - \frac{1}{s} = \frac{1}{0,100 \text{ [m]}}$$

$$\frac{1}{s+0,800} = \frac{1}{s} + \frac{1}{0,100} = \frac{s+0,100}{0,100 s}$$

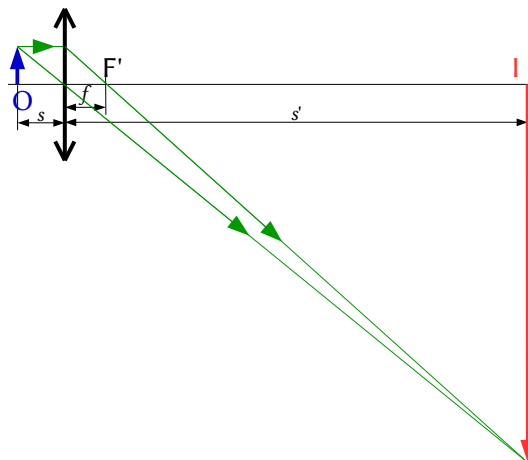
$$0,100 s = (s + 0,100) (s + 0,800)$$

$$s^2 + 0,800 s + 0,0800 = 0$$

$$s_1 = -0,117 \text{ m}$$

$$s_2 = -0,683 \text{ m}$$

El dibujo representa de forma aproximada la primera solución.



Cuestiones y problemas de las [Pruebas de Acceso a la Universidad](#) (P.A.U.) en Galicia.

[Respuestas](#) y composición de [Alfonso J. Barbadillo Marán](#).

Algunos cálculos se hicieron con una [hoja de cálculo](#) OpenOffice (o LibreOffice) del mismo autor.

Algunas ecuaciones y las fórmulas orgánicas se construyeron con la extensión [CLC09](#) de Charles Lalanne-Cassou.

La traducción al/desde el gallego se realizó con la ayuda de [traducindote](#), de Óscar Hermida López.

Se procuró seguir las [recomendaciones](#) del Centro Español de Metrología (CEM)

Sumario

<u>ÓPTICA</u>	1
<u>INTRODUCCIÓN</u>	1
<u>MÉTODO</u>	1
<u>RECOMENDACIONES</u>	1
<u>ACLARACIONES</u>	2
<u>PROBLEMAS</u>	2
<u>DIOPTRIO PLANO</u>	2
<u>ESPEJOS</u>	6
<u>LENES</u>	14
<u>CUESTIONES</u>	23
<u>DIOPTRIO PLANO</u>	23
<u>ESPEJOS</u>	27
<u>LENES</u>	31
<u>ONDAS LUMINOSAS</u>	32
<u>LABORATORIO</u>	33

Índice de exámenes P.A.U.

2004.....	
Jun. 04.....	24, 32, 36
Set. 04.....	8, 31
2005.....	
Jun. 05.....	25, 37
Set. 05.....	10, 24, 37
2006.....	
Jun. 06.....	11, 31
Set. 06.....	19, 27, 34
2007.....	
Jun. 07.....	31, 37
Set. 07.....	26, 38
2008.....	
Jun. 08.....	13, 16
Set. 08.....	24, 27, 38
2009.....	
Jun. 09.....	32
Set. 09.....	7, 14
2010.....	
Jun. 10.....	32, 35
Set. 10.....	23, 26, 37
2011.....	
Jun. 11.....	21
Set. 11.....	5, 28
2012.....	
Jun. 12.....	20, 28
Set. 12.....	18
2013.....	
Jun. 13.....	4, 28
Set. 13.....	29, 38
2014.....	
Jun. 14.....	6, 33 s.
Set. 14.....	2, 35
2015.....	
Jun. 15.....	25
Set. 15.....	33
2016.....	
Jun. 16.....	30
Set. 16.....	17, 34